V. A. KISELIOV

MECANICA de CONSTRUCCION

tomo

II

Editorial Mir

Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

В. А. КИСЕЛЕВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

СТРОЙИЗДАТ
Москва

V. A. KISELIOV

MECANICA
DE
CONSTRUCCION

TOMO II

Editorial Mir · Moscú

CDU 624.04 (075.8) = 60

На испанском языке 1972

Impreso en la URSS
Derechos reservados

INDICE

CALCULO DE SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS O HIPERESTATICOS

CAPITULO XIII * SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS Y METODOS BASICOS DE SU CALCULO

§ **119.** Sistemas estáticamente indeterminados 11
§ **120.** Noción sobre los métodos básicos de cálculo de sistemas estáticamente indeterminados 14

CAPITULO XIV * TEORIA GENERAL DEL METODO DE FUERZAS Y CALCULO DE PORTICOS PLANOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS O HIPERESTATICOS

§ **121.** Grado de indeterminación estática 18
§ **122.** Ecuaciones canónicas para el cálculo bajo carga fija 20
§ **123.** Fuerzas sustituyentes (internas) debidas a la carga en los sistemas hiperestáticos y construcción de sus diagramas 23
§ **124.** Sobre el sistema básico del método de fuerzas 28
§ **125.** Construcción de los diagramas de las fuerzas transversales y longitudinales 30
§ **126.** Ecuaciones canónicas, para el cálculo de la acción de la temperatura y la dislocación de los apoyos 32
§ **127.** Desplazamientos en los sistemas hiperestáticos 34
§ **128.** Verificación del cálculo 37
§ **129.** Algunas simplificaciones en el método de fuerzas 40
§ **130.** Valores iniciales de los momentos de inercia y las áreas de las secciones 52
§ **131.** Principio del trabajo mínimo 53
§ **132.** Deducción de las ecuaciones canónicas por el teorema de la reciprocidad de los trabajos 56
§ **133.** Procedimientos especiales de resolución de las ecuaciones canónicas 57
§ **134.** Empleo de los diagramas ortogonales 71
§ **135.** Incógnitas y diagramas colectivos 73

§ **136.** Simplificaciones durante el cálculo de sistemas simétricos 77
§ **137.** Método estático de construcción de las líneas de influencia 82
§ **138.** Método cinemático de construcción de las líneas de influencia 86
§ **139.** Cálculo de pórticos complejos 89
§ **140.** Cálculo de pórticos bajo varias cargas accidentales 90
§ **141.** Conclusiones sobre el cálculo de pórticos 92

CAPITULO XV * CALCULO DE VIGAS CONTINUAS POR EL METODO DE FUERZAS

§ **142.** Nociones generales 93
§ **143.** Sistema básico 94
§ **144.** Ecuación de los tres momentos 94
§ **145.** Particularidades del empleo de la ecuación de los tres momentos 99
§ **146.** Expresiones del momento flector y de la fuerza transversal en el tramo de una viga 99
§ **147.** Método de los puntos focales de los momentos 102
§ **148.** Cálculo de vigas continuas sobre apoyos elásticos 108
§ **149.** Diagramas envolventes teóricos de los momentos flectores 110
§ **150.** Método estático de construcción de las líneas de influencia de los momentos de apoyo 111
§ **151.** Empleo de la simetría en el método estático de construcción de las líneas de influencia de los momentos de apoyo 121
§ **152.** Método cinemático de construcción de las líneas de influencia de los momentos de apoyo 125
§ **153.** Líneas de influencia de M y Q en el tramo 128
§ **154.** Líneas de influencia de las reacciones de apoyo 130
§ **155.** Cálculo de vigas continuas de sección variable 130
§ **156.** Formas de las líneas de influencia de M, Q y R y posiciones teóricas o de cálculo de la carga uniformemente distribuida 139

CAPITULO XVI * CALCULO DE ARMADURAS ARTICULADAS PLANAS HIPERESTATICAS Y DE SISTEMAS COMBINADOS POR EL METODO DE FUERZAS

§ **157.** Grado de indeterminación estática y sistema básico 140
§ **158.** Ecuaciones canónicas 141
§ **159.** Influencia del área de la sección de una barra superflua sobre las fuerzas y tensiones longitudinales 143
§ **160.** Armadura de resistencia uniforme 145
§ **161.** Dos procedimientos para calcular armaduras hiperestáticas 146
§ **162.** Método de tensiones 147
§ **163.** Valores posibles de la incógnita básica en una armadura monohiperestática 149
§ **164.** Volumen teórico de una armadura 152

§ **165.** Tensiones debidas a la acción de la temperatura, dislocación de los apoyos y tracción de las barras de longitud incorrecta 153
§ **166.** Líneas de influencia de las fuerzas longitudinales 154
§ **167.** Cálculo aproximado de sistemas combinados 155

CAPITULO XVII * CALCULO DE ARCOS HIPERESTATICOS POR EL METODO DE FUERZAS

§ **168.** Clasificación y forma de los arcos 158
§ **169.** Observaciones para el cálculo de arcos 160
§ **170.** Sistemas básicos para arcos sin articulaciones 161
§ **171.** Cálculo de arcos sin articulaciones bajo carga fija 163
§ **172.** Cálculo de arcos sin articulaciones a la acción de la temperatura 166
§ **173.** Cálculo de los arcos sin articulaciones al desplazamiento de los vínculos 167
§ **174.** Cálculo de los arcos sin articulaciones con el eje a lo largo de la curva de presión en el arco triarticulado 169
§ **175.** Sobre el arco no articulado sin momentos 170
§ **176.** Regulación de las tensiones en los arcos sin articulaciones 171
§ **177.** Cálculo de arcos sin articulaciones sobre apoyos elásticos 173
§ **178.** Líneas de influencia de las incógnitas básicas, de los momentos flectores y de las fuerzas longitudinales y transversales en el arco sin articulaciones 176
§ **179.** Método gráfico-analítico de construcción de las líneas de influencia de las incógnitas básicas en el arco sin articulaciones 180
§ **180.** Líneas de influencia de las incógnitas básicas para los arcos sin articulaciones de configuración especial 183
§ **181.** Cálculo de arcos biarticulados bajo carga fija 190
§ **182.** Cálculo de arcos biarticulados a la acción de la temperatura y dislocación de los apoyos 192
§ **183.** Líneas de influencia del empuje, los momentos flectores y las fuerzas transversales en el arco biarticulado 193
§ **184.** Método gráfico-analítico de construcción de las líneas de influencia del empuje en el arco biarticulado 194
§ **185.** Cálculo de arcos biarticulados con el eje a lo largo de la curva de presión en el arco triarticulado 196
§ **186.** Cálculo de coronas circulares 197

CAPITULO XVIII * CALCULO DE SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS POR EL METODO DE DESPLAZAMIENTOS

§ **187.** Grado de indeterminación cinemática 200
§ **188.** Ecuaciones canónicas para el cálculo bajo carga fija 202
§ **189.** Diagramas de momentos flectores en los elementos del sistema básico con el número completo de vínculos 203
§ **190.** Determinación de los desplazamientos relativos de los extremos de las barras, durante los desplazamientos progresivos de los nudos 207

§ **191.** Coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas 208
§ **192.** Método estático de determinación de los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas 212
§ **193.** Observaciones sobre la determinación de los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas 216
§ **194.** Construcción y verificación del diagrama de los momentos flectores debidos a la carga 218
§ **195.** Cálculo de refuerzos de apoyo 220
§ **196.** Cálculo de pórticos, cuyos nudos no tienen desplazamientos progresivos bajo carga nodal 222
§ **197.** Empleo de la simetría 223
§ **198.** Método estático de construcción de líneas de influencia 224
§ **199.** Método cinemático de construcción de las líneas de influencia de los desplazamientos angulares y progresivos de los nudos 235
§ **200.** Cálculo de la acción de la temperatura y los dislocamientos de los apoyos 236
§ **201.** Interpretación estática de la resolución de las ecuaciones canónicas por el método de aproximaciones sucesivas 244
§ **202.** Simplificaciones en el método de desplazamientos 246

CAPITULO XIX * CALCULO DE SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS POR LOS METODOS MIXTO Y COMBINADO

§ **203.** Comparación de los métodos de fuerzas y de desplazamientos y elección del método de cálculo 247
§ **204.** Método mixto 250
§ **205.** Método combinado 253
§ **206.** Método combinado de cálculo de sistemas simétricos 254

CAPITULO XX * METODOS APROXIMADOS Y MECANISMOS PARA CALCULAR SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS

§ **207.** Finalidad de los métodos aproximados 255
§ **208.** Cálculo aproximado de pórticos bajo cargas verticales 256
§ **209.** Cálculo aproximado de pórticos bajo cargas horizontales 258
§ **210.** Métodos mecánicos de cálculo 259
§ **211.** Modelado para los métodos mecánicos de cálculo 266

CAPITULO XXI * CARGAS LIMITES DE LOS SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS

§ **212.** Estados límites de los sistemas por su capacidad portante 271
§ **213.** Cálculo de vigas de un tramo de sección constante 272
§ **214.** Cálculo de vigas de un solo tramo con sección variable 275
§ **215.** Cálculo de vigas continuas de sección constante en tramos sueltos 276
§ **216.** Cálculo de vigas continuas de sección variable 283
§ **217.** Cálculo de pórticos y arcos 283

§ **218.** Cálculo de armaduras 297
§ **219.** Descarga y tensiones y deformaciones remanentes 300
§ **220.** Influencia de la elasticidad y las dislocaciones de los apoyos en el valor de la carga límite 307
§ **221.** Cálculo de diferentes cargas repetidas y alternadas 308

CAPITULO XXII * CALCULO DE SISTEMAS ESPACIALES HIPERESTATICOS

§ **222.** Observaciones generales 309
§ **223.** Cálculo de sistemas espaciales por el método de fuerzas 310
§ **224.** Cálculo de pórticos planos bajo carga espacial por el método de fuerzas 313
§ **225.** Cálculo de pórticos espaciales por el método de desplazamientos 317

CAPITULO XXIII * CALCULO DE SISTEMAS PLANOS POR EL ESTADO DEFORMADO

§ **226.** Particularidades del cálculo por el estado deformado 320
§ **227.** Cálculo exacto por el estado deformado 321
§ **228.** Cálculo de vigas continuas 325
§ **229.** Cálculo por el estado deformado por el procedimiento de aproximaciones sucesivas 335
§ **230.** Cálculo de pórticos por el estado deformado por medio de aproximaciones sucesivas 338
§ **231.** Observaciones al cálculo por el estado deformado 339

CALCULO DE SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS O HIPERESTATICOS

CAPITULO XIII * SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS Y METODOS BASICOS DE SU CALCULO

§ 119. SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS. Se llaman sistemas *estáticamente indeterminados* a aquellos, en los que, no todas las reacciones y fuerzas internas, determinadas por el estado indeformado del sistema, pueden ser halladas de las ecuaciones de equilibrio.

Estos sistemas contienen vínculos superfluos, que vienen a ser su *signo cinemático*.

Se llama *grado de indeterminación estática* al número de vínculos superfluos cuya eliminación transforma al sistema en estáticamente determinado.

Las reacciones y fuerzas internas en los sistemas estáticamente indeterminados sólo pueden ser halladas empleando junto con las ecuaciones de equilibrio las ecuaciones complementarias desprendidas del estado deformado del sistema. Los valores de las reacciones y fuerzas internas de los sistemas estáticamente indeterminados dependen del estado en que se encuentra la construcción, es decir, de si el material de la estructura trabaja hasta el límite de proporcionalidad o fuera de éste.

Si el material de la estructura trabaja dentro del límite de proporcionalidad, entonces, las reacciones y las fuerzas internas se determinan en la fase elástica de trabajo de la estructura, esto es, por el cálculo «elástico». Pero, si el material de la estructura trabaja fuera del límite de proporcionalidad, las reacciones y las fuerzas internas se deben determinar por la fase elástico-plástica de su trabajo, o sea, por el cálculo «plástico».

Los sistemas estáticamente indeterminados poseen las siguientes propiedades:

1. En un sistema estáticamente indeterminado, las fuerzas internas dependen de la cantidad y calidad (rigidez) de los vínculos superfluos. Esto se puede poner en claro examinando los sistemas estáticamente determinados simples, transformados en sistemas estáticamente indeterminados por medio de los vínculos superfluos *ab* y *cd* (fig. 254). Está claro que el sistema trabaja de distinta manera con un vínculo superfluo, por ejemplo, la barra *ab*, que con dos. Pero el trabajo del sistema dependerá también de la rigidez de estos vínculos.

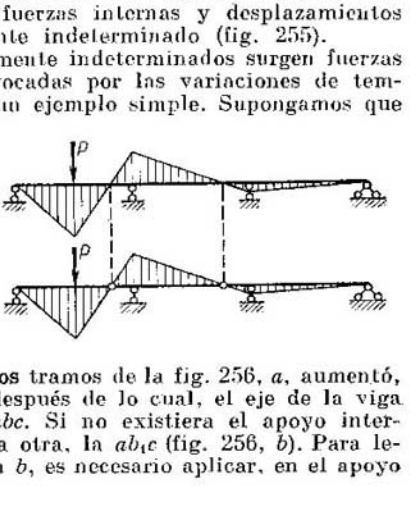
Supongamos que los elementos delgados *ab* y *cd* (fig. 254) están hechos de goma. Es fácil convencerse de que a pesar de que los sistemas con estos vínculos son estáticamente indeterminados no obstante, las fuerzas internas en estos sistemas se diferencian poco de las fuerzas internas en los sistemas estáticamente determinados, sin estos vínculos.

Fig. 254

2. Los desplazamientos de los sistemas estáticamente indeterminados, como norma, son menores que los de los sistemas estáticamente determinados invariantes, de los cuales ellos pueden ser obtenidos. Esto se explica, con que todo vínculo superfluo que trabaja eleva la rigidez del sistema, ya que obstaculiza el desplazamiento por su dirección. Si para una carga dada, ninguno de los vínculos complementarios introducidos en el sistema estáticamente determinado trabaja, entonces, los desplazamientos de los sistemas estáticamente indeterminado y estáticamente determinado son idénticos. Si para la carga dada, en un sistema estáticamente indeterminado con n vínculos superfluos, n vínculos no trabajan, entonces, excluyéndolos, se puede obtener un sistema estáticamente determinado con las mismas fuerzas internas y desplazamientos que en el sistema estáticamente indeterminado (fig. 255).

3. En los sistemas estáticamente indeterminados surgen fuerzas internas complementarias provocadas por las variaciones de temperatura. Aclaramos esto con un ejemplo simple. Supongamos que

Fig. 255



la temperatura de la viga de dos tramos de la fig. 256, *a*, aumentó, arriba, en t_1 y, abajo, en t_2, después de lo cual, el eje de la viga ocupará una nueva posición *abc*. Si no existiera el apoyo intermedio, la posición del eje sería otra, la ab_1c (fig. 256, *b*). Para levantar el punto b_1 a la posición *b*, es necesario aplicar, en el apoyo del medio, la fuerza X_1.

4. En los sistemas estáticamente indeterminados, como norma, surgen fuerzas internas complementarias, debidas a la dislocación de los apoyos (fig. 256, *c*). Efectivamente, si no existiera el apoyo intermedio, la viga debido a la dislocación del apoyo izquierdo, giraría sin flexionarse con respecto al apoyo derecho *c* (fig. 256, *d*). Para levantar el punto b_1 de la viga hasta la posición *b*, es necesario aplicar la fuerza X_A en el apoyo del medio.

5. En los sistemas estáticamente indeterminados se originan fuerzas internas debido a la tensión en los elementos fabricados con inexactitud. Así, por ejemplo, si la barra *bc* tiene una longitud

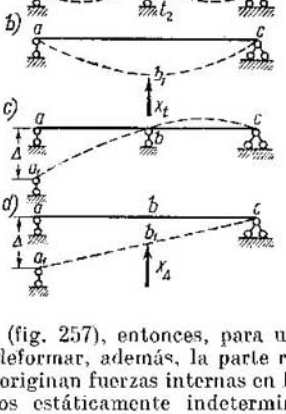


Fig. 256

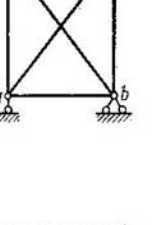


Fig. 257

insuficiente (fig. 257), entonces, para unirla al nudo *c* es necesario estirarla y deformar, además, la parte restante del sistema, con dos fuerzas que originan fuerzas internas en las demás barras del sistema.

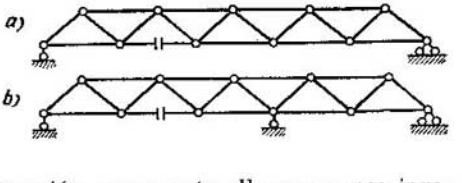
6. En los estáticamente indeterminados, las fuerzas internas debidas a la carga, dependen de la correlación de la rigidez de las secciones de las barras, esto es, de la correlación de los productos de las características geométricas de las secciones por el correspondiente módulo de elasticidad y, las debidas a la temperatura y asiento de los apoyos, de los propios valores de las rigideces.

7. Los sistemas estáticamente indeterminados ofrecen mayor resistencia a la rotura que los sistemas estáticamente determinados.

El sistema estáticamente determinado posee sólo los vínculos indispensables para su invariación. Por eso, la eliminación de aunque sólo sea uno de sus vínculos, lo torna variante, el cual, hablando en general, sólo puede estar en equilibrio en el caso de una carga de tipo particular. Así, por ejemplo, al eliminar una barra en la armadura estáticamente determinada de la figura 258, *a*, lleva a su derrumbamiento.

La exclusión de un vínculo superfluo de un sistema estáticamente indeterminado no lo transforma en variante. Por eso, la rotura de una barra de una armadura sobre tres apoyos (fig. 258, *b*)

Fig. 258



aún no determina su destrucción, por cuanto ella permanece invariante. Su derrumbamiento ocurrirá sólo al romperse otra barra más.

Ciertas propiedades de los sistemas estáticamente indeterminados, por ejemplo, la sensibilidad a la variación de la temperatura, a la dislocación de los apoyos y a la fabricación incorrecta, se manifiesta de diferente manera, dependiendo de la fase de trabajo —elástica o elasticoplástica— en que se halla la estructura.

Todo lo dicho más arriba, se refiere también a los sistemas espaciales.

§ 120. NOCION SOBRE LOS METODOS BASICOS DE CALCULO DE SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS. Como métodos básicos de cálculo de los sistemas estáticamente indeterminados se consideran el **método de fuerzas,** cuando por incógnitas se toman las fuerzas y, el **método de desplazamientos,** cuando como por incógnitas se toman los desplazamientos angulares y lineales de los nudos del sistema.

Ambos métodos están ligados por una idea común, que consiste en que el cálculo se efectúa sobre un **sistema básico** obtenido del dado.

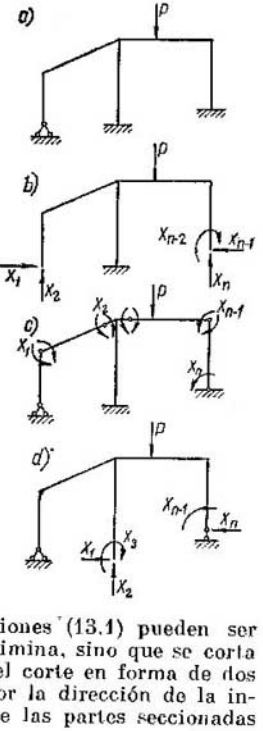
En el método de fuerzas, el sistema básico se obtiene excluyendo todos o parte de los vínculos **superfluos,** de tal modo que el sistema obtenido resulte simple y accesible para determinar en él los esfuerzos y desplazamientos por los métodos estudiados anteriormente. Ante todo, tal sistema será el **sistema estáticamente determinado** (fig. 259).

Por cuanto, en las condiciones dadas, «superfluos» se pueden considerar distintos vínculos, entonces, el sistema básico, en el método de fuerzas, no es uno sólo, sino que pueden ser varios, por lo general, diferentes uno de otro (fig. 259, *b, c, d*). La eliminación del sistema sólo a los vínculos superfluos deberá conducir siempre a un sistema invariante, lo que significa que, el sistema básico, por el método de fuerzas, será **invariante.**

Al sistema básico, además de la carga dada, a cambio de los vínculos eliminados, se le aplican aún las reacciones incógnitas de los mismos $X_1, \ldots, X_n$, sujetas a determinación, las cuales se llaman incógnitas **básicas** del método de fuerzas (fig. 259).

Los valores de las reacciones $X_1, \ldots X_n$ deberán ser tales, que los desplazamientos por sus direcciones, en el sistema básico, sean

Fig. 259



iguales a los respectivos desplazamientos en el sistema dado, donde éstas, en el caso de vínculos rígidos, no son posibles y, para vínculos flexibles, son limitadas. En estas condiciones, el sistema básico no se diferenciará del dado.

Si los vínculos eliminados son rígidos, entonces, los desplazamientos por sus direcciones en el sistema dado son iguales a cero, lo que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1(X_1, X_2, \ldots, X_n, P) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Delta_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, P) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.1)$$

Si los vínculos eliminados son flexibles (deformables), entonces, los desplazamientos por sus direcciones en el sistema dado no son iguales a cero y se determinan por las deformaciones de los vínculos. Sin embargo, también en este caso, las ecuaciones (13.1) pueden ser empleadas si el vínculo flexible no se elimina, sino que se corta y, sus reacciones incógnitas se aplican en el corte en forma de dos fuerzas. En este caso, el desplazamiento por la dirección de la incógnita será el desplazamiento recíproco de las partes seccionadas del vínculo, que es siempre igual a cero.

(13.1) son las ecuaciones básicas del método de fuerzas, válidas para cualquiera de las fases de trabajo de la estructura e idénticamente empleables, tanto, para los sistemas que se someten al principio de la independencia de acción de las fuerzas, como para los que no se someten a él.

Por el método de desplazamientos, el sistema básico se obtiene introduciendo nuevos vínculos complementarios que obstaculicen los desplazamientos angulares y lineales de los nudos del sistema dado, y de modo que el sistema básico obtenido sea simple y accesible para determinar en él los esfuerzos y desplazamientos.

La introducción de nuevos vínculos dentro del sistema dado deberá ser compensada con solicitaciones externas complementarias sobre el sistema básico y, precisamente, con los desplazamientos por la dirección de los vínculos introducidos. Con otras palabras,

al sistema dado están aplicadas sólo las acciones dadas y, al básico, aún los desplazamientos buscados de los vínculos introducidos.

Como es sabido, los desplazamientos de una barra pueden ser expresados por medio de los desplazamientos angulares y progresivos de sus extremos (α, β, Δ_a y Δ_b) y de la carga (fig. 260). Efectivamente, colocando el origen de las coordenadas en el punto a_1, podemos, por ejemplo, componer la ecuación del eje de una barra encorvada por el método de los parámetros iniciales. Los parámetros iniciales incógnitos M_0 y Q_0 se determinan por las condiciones sobre el extremo derecho de la barra, donde $y = \Delta_b - \Delta_a$ y $\frac{dy}{dz} = \beta$.

Fig. 260

Si la ecuación del eje de una barra recta encorvada ha sido compuesta, entonces, diferenciándola en forma sucesiva, se pueden determinar los momentos flectores ($M = -EJy''$) y las fuerzas transversales ($Q = -EJy'''$) y después, las fuerzas longitudinales.

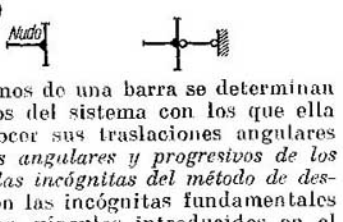


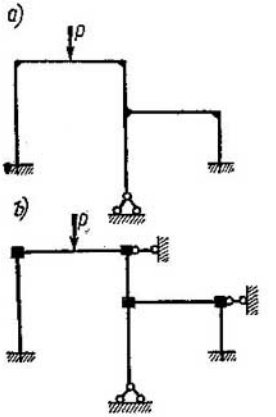
Fig. 261

Los desplazamientos de los extremos de una barra se determinan por los desplazamientos de los nudos del sistema con los que ella linda. De ahí la necesidad de conocer sus traslaciones angulares y progresivas. Estos *desplazamientos angulares y progresivos de los nudos del sistema son, precisamente, las incógnitas del método de desplazamientos.* En correspondencia con las incógnitas fundamentales del método de desplazamientos, los vínculos introducidos en el sistema básico deberán ser de dos tipos:

vínculo de momento (angular) impuesto al nudo, que obstaculiza sólo su *rotación* y que es capaz de crear únicamente un momento reactivo; en la fig. 261, *a* se exponen dos variantes de representación simbólica de tal vínculo;

vínculo de fuerza (progresivo) impuesto al sistema, que obstaculiza sólo el desplazamiento progresivo de los nudos y que es capaz

Fig. 262



de crear únicamente una fuerza reactiva por la dirección de este vínculo; tal vínculo se representa en la fig. 261, *b*.

Los vínculos de momento se imponen corrientemente a todos los nudos rígidos del sistema y los de fuerza, allí, donde hay desplazamientos progresivos independientes (fig. 262). El sistema obtenido de tal modo se llama básico *con el número de vínculos completo* y está compuesto de elementos estandart: vigas empotradas en los dos extremos y vigas empotradas por uno de sus extremos, con el otro sobre un apoyo articulado. Estas vigas estandart deberán ser previamente estudiadas a la acción de la carga y a la dislocación de sus extremos (véase el § 189).

De lo dicho se desprende que el *sistema básico del método de desplazamientos con el número de vínculos completo, de hecho, puede ser obtenido de una sola manera.*

Para la obtención de las ecuaciones canónicas por el método de desplazamientos, se desplaza cada vínculo impuesto al sistema básico, esto es, el vínculo de momento, se gira en el correspondiente ángulo de giro del sistema **dado** y, al vínculo de fuerza, se le imprime un movimiento de traslación, dentro del sistema dado, en el valor de este desplazamiento. Estos desplazamientos los designamos por $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. Escribimos las expresiones de las reacciones de los vínculos introducidos, originadas por los desplazamientos de los vínculos y por la carga. Examinamos cualquier vínculo k. Su reacción $R_{k(z_1, z_2, \ldots z_n, P)}$ es función de los desplazamientos $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ y de la carga P. Esta reacción deberá ser igual a cero, por cuanto, en el sistema dado, este vínculo no existe. Sólo entonces el sistema básico, con los vínculos impuestos, será equivalente al sistema dado que no posee estos vínculos. Por consiguiente:

$$R_{k(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, P)} = 0. \tag{13.2}$$

Suponiendo que $k = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos el número indispensable de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} R_{1(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, P)} &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ R_{n(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, P)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

(13.3) son las ecuaciones básicas del método de desplazamientos y, lo mismo que las (13.1), son válidas para todos los estados de trabajo de la estructura e idénticamente empleables tanto, para los sistemas que se someten al principio de independencia de acción de las fuerzas, como para los que no se someten a él.

En conclusión, señalamos que el método de fuerzas se puede emplear para calcular cualquier sistema y, el de desplazamientos, fundamentalmente, para el cálculo de pórticos y vigas continuas. Como veremos más adelante, el trabajo preliminar para el método de desplazamientos, también se efectúa basándose en el método de fuerzas.

Por eso, el método de fuerzas es el más general.

CAPITULO XIV * TEORIA GENERAL DEL METODO DE FUERZAS Y CALCULO DE PORTICOS PLANOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS O HIPERESTATICOS

§ 121. GRADO DE INDETERMINACION ESTATICA. El grado de indeterminación estática se determina análogamente a la fórmula (2.9)

$$n = B + 2A + 3S + V_{ap} - 3D. \qquad (14.1)$$

Donde D es el número de cualesquiera discos estáticamente determinados.

Para la determinación del grado de indeterminación estática, además de esta fórmula se puede obtener una más simple, a base

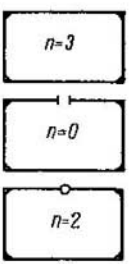


Fig. 263

de los siguientes razonamientos. Cualquier contorno cerrado (fig. 263) se distingue del abierto en que, en el sitio del cierre, es como si se hubiera colocado una soldadura, o sea, un vínculo estáticamente equivalente a tres vínculos del primer tipo. Por consiguiente, el grado de indeterminación estática del contorno cerrado es igual a tres. Cada articulación introducida en un circuito cerrado le quita un grado de indeterminación estática. De esta manera tenemos que

$$n = 3C - A \qquad (14.2)$$

donde: C es la cantidad de contornos cerrados en el sistema, sin contar las articulaciones;

A, la cantidad de articulaciones en los contornos cerrados.

Al emplear esta fórmula la tierra deberá ser considerada como un disco abierto.

Además de la invariación estática total se distingue la invariación estática externa e interna.

El grado de invariación estática externa n_1 del sistema está determinado por el número de vínculos superfluos a tierra y, el grado de invariación estática interna n_2, por el número de vínculos superfluos dentro del sistema, aislado de la tierra. El grado de invariación estática externa puede ser determinado por la fórmula

$$n_1 = V_a - 3 - V_{sust} \tag{14.3}$$

donde: V_a es el número de vínculos de apoyo (no de apoyos);

V_{sust}, el número de vínculos a tierra que sustituyen a los vínculos insuficientes dentro del sistema.

El número de vínculos sustituyentes se determina analizando el sistema sin los apoyos. El grado de variación de este sistema es igual al número de vínculos sustituyentes V_{sus} contenidos en los vínculos de apoyo.

El grado de invariación interna es igual a

$$n_2 = n - n_1. \tag{14.4}$$

La magnitud n_1 es el mayor número de vínculos de apoyo y n_2, el número de vínculos internos que pueden ser excluidos al pasar al sistema básico estáticamente determinado. Al mismo tiempo es conveniente tener en cuenta que en vez de excluir todos o parte de los vínculos de apoyo, se puede excluir el mismo número de vínculos externos complementarios de n_2. La eliminación de un número de vínculos de apoyo superior a n_1, a cambio de los vínculos internos, es **inadmisible**, dado que ante esto se forma un sistema variante.

Ejemplo 28. Determinar el grado de indeterminación estática (fig. 264, *a*)

Resolución por la fórmula (14.1).

Desmembramos el sistema de tal manera, que cada parte quede invariante y estáticamente determinada (fig. 264, *b*). Tenemos: $D = 3$, $B = 0$, $S = 1$, $A = 2$ (articulación múltiple), $V_a = 11$ y $n = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 11 - 3 \cdot 3 = 9$.

Para la determinación del número de barras sustituyentes V_{sust} eliminamos los apoyos (fig. 264, *c*) y analizamos su variación. En este caso, las partes 2 y 3 están ligadas a la *1* sólo por medio de una articulación, o sea, en forma variable. Para la invariación faltan las dos barras mostradas con líneas punteadas. Por consiguiente, $V_{sust} = 2$. El grado de determinación externa, por (14.3), es $n_1 = 11 - 3 - 2 = 6$ y, el de indeterminación interna por (14.4), $n_2 = 9 - 6 = 3$.

Los números $n_1 = 6$ y $n_2 = 3$ demuestran que, al transformar el sistema dado en estáticamente determinado, no se pueden eliminar más de seis vínculos a tierra ni más de tres internos.

Si desmembramos el sistema de otra manera (fig. 264, *d*), aquella parte que con anterioridad fue considerada como tercer disco, ahora la tomamos como

barra. Entonces, $D = 2$, $B = 1$, $A = 1$, $S = 1$, $V_a = 9$;

$$n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 9 - 3 \cdot 2 = 9.$$

Resolución por la fórmula (14.2).

La tierra es incluida en el número de discos (fig. 264, *e*). El número de contornos cerrados es $C = 5$, el número de articulaciones $A = 6$, y $n =$

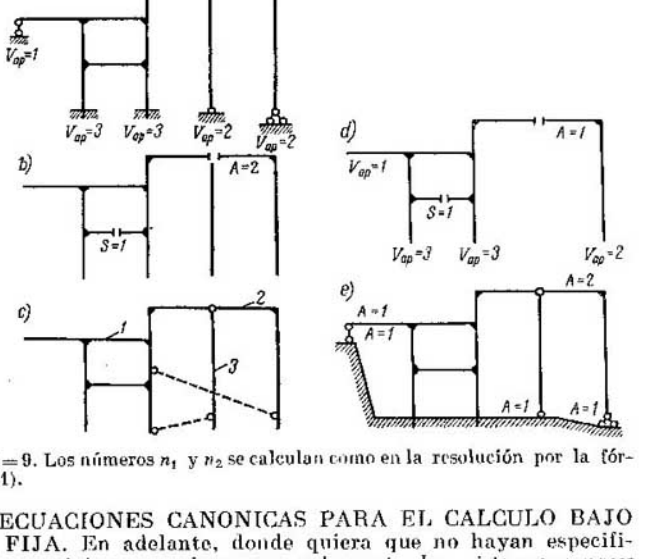


Fig. 264

$= 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Los números n_1 y n_2 se calculan como en la resolución por la fórmula (14.1).

§ 122. ECUACIONES CANONICAS PARA EL CALCULO BAJO CARGA FIJA. En adelante, donde quiera que no hayan especificaciones especiales, examinaremos solamente los *sistemas capaces de deformarse linealmente*. Esto significa que, en lo fundamental, consideraremos el así llamado cálculo «elástico».

Para los sistemas que permiten el empleo del principio de independencia de acción de las fuerzas, presentamos la ecuación k-ésima (13.1) en la forma siguiente:

$$\Delta_{k(X_1, X_2, \ldots, X_n, P)} = \Delta_{kX_1} + \Delta_{kX_2} + \ldots + \Delta_{kX_n} + \Delta_{kP} = 0.$$

Sustituyendo a continuación

$$\Delta_{kX_1} = \delta_{k1} X_1, \ \ldots, \ \Delta_{kX_n} = \delta_{kn} X_n,$$

obtenemos

$$\delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \ldots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kP} = 0,$$

donde δ_{km} es el desplazamiento unitario dentro del sistema básico por la dirección de la fuerza X_k debido a la fuerza $X_m = 1$ y. Δ_{kP}

es el desplazamiento en el sistema básico por la dirección de X_k, debido a la carga.

Considerando en esta ecuación a $k = 1, 2, \ldots, n$, sucesivamente, obtenemos tantas ecuaciones cuantas son necesarias para la determinación de las incógnitas $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0;\\ &\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.5)$$

El sistema de ecuaciones (14.5) se llama sistema de ecuaciones canónicas del método de fuerzas.

Escribiremos este sistema en la forma matriz

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{D}_P = 0 \qquad (14.6)$$

donde:

$$1)\ \boldsymbol{D} = \|\delta_{km}\| = \begin{Vmatrix} \delta_{11}\delta_{12} \ldots \delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22} \ldots \delta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}\delta_{n2} \ldots \delta_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (14.7)$$

es la matriz de coeficientes de las ecuaciones canónicas;

$$2)\ \boldsymbol{X} = |\{X_1 X_2 \ldots X_n\}| \qquad (14.8)$$

es la matriz de la columna (vector) de las incógnitas;

$$3)\ \boldsymbol{D}_P = |\{\Delta_{1P}\Delta_{2P} \ldots \Delta_{nP}\}| \qquad (14.9)$$

es la matriz de columna (vector) de los desplazamientos de carga.

Los desplazamientos propios $\delta_{11}, \delta_{22}, \ldots, \delta_{nn}$ están dispuestos en la diagonal principal de la matriz de desplazamientos.

Ahora determinamos los coeficientes y los miembros libres del sistema de ecuaciones canónicas (14.5). Ante todo, calculamos los coeficientes $\delta_{km} = \frac{\Delta_{km}}{x_m}$ en la forma general. Para los sistemas con barras rectas y de reducida curvatura empleamos, con este objeto, la fórmula general de desplazamientos (11.38) que presentamos en la forma siguiente:

$$\delta_{km}X_m = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ}\,ds + \sum \int \overline{N}_k \frac{N_m}{EF}\,ds + \sum \int \mu \overline{Q}_k \frac{Q_m}{GF}\,ds.$$

Dividiendo por X_m, tendremos

$$\delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \frac{\overline{M}_m}{EJ}\,ds + \sum \int \overline{N}_k \frac{\overline{N}_m}{EF}\,ds + \sum \int \mu \overline{Q}_k \frac{\overline{Q}_m}{GF}\,ds =$$

$$= (\overline{\boldsymbol{M}}_k)\cdot(\overline{\boldsymbol{M}}_m) + (\overline{\boldsymbol{N}}_k)\cdot(\overline{\boldsymbol{N}}_m) + (\overline{\boldsymbol{Q}}_k)\cdot(\overline{\boldsymbol{Q}}_m), \qquad (14.10)$$

donde M_k, N_k y Q_k son los momentos flectores y las fuerzas longitudinales y transversales debidos a la fuerza adimensional $X_k = 1$ en el sistema básico y las mismas magnitudes $\overline{M}_m$, $\overline{N}_m$ y $\overline{Q}_m$ debidas a la fuerza adimensional $X_m = 1$.

$(\overline{M}_k)$ $(\overline{N}_k)$ $(\overline{Q}_k)$ y $(\overline{M}_m)$ $(\overline{N}_m)$ $(\overline{Q}_m)$ son, respectivamente, los diagramas de los momentos flectores y de las fuerzas longitudinales y transversales en el sistema básico, debidos a las mismas fuerzas $X_k = 1$ y $X_m = 1$.

Los coeficientes propios δ_{kk}, se calculan, también, por la fórmula (14.10). Por cuanto, al determinar δ_{kk}, en los integrandos figurarán los cuadrados de las fuerzas sustituyentes, entonces, el desplazamiento propio unitario es positivo y, el suplementario δ_{km} puede ser positivo, negativo o igual a cero, es decir, $\delta_{kk} > 0$, $\delta_{km} \geqq 0$.

El desplazamiento Δ_{kP}, se determina por la fórmula de desplazamientos (11.38) para los sistemas planos:

$$\Delta_{kP} = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_P^0}{EJ} ds + \sum \int \overline{N}_k \frac{N_P^0}{EF} ds + \sum \int \mu \overline{Q}_k \times$$

$$\times \frac{Q_P^0}{GF} ds = (M_P^0)(\overline{M}_k) + (N_P^0)(\overline{N}_k) + (Q_P^0)(\overline{Q}_k), \qquad (14.11)$$

donde M_P^0, N_P^0 y Q_P^0 son los momentos flectores y las fuerzas longitudinales y transversales debidos a la carga y (M_P^0), (N_P^0) y (Q_P^0), los respectivos diagramas debidos a la misma en el sistema básico.

En aquellos casos cuando en el sistema hay barras rectas de sección constante, el cálculo de las integrales (14.10) y (14.11), por estas barras, puede ser efectuado por el método de multiplicación de diagramas.

El cálculo de δ_{km} y Δ_{kP} se puede efectuar también en la forma matriz. Mostramos como hacerlo, teniendo en cuenta sólo las deformaciones debidas a la flexión. Supongamos que los diagramas unitarios y el de carga, en el sistema básico, están divididos en t partes. Entonces, de acuerdo con (11.59), podemos escribir:

$$\delta_{km} = \| \overline{M}'_{1k} \overline{M}'_{2k} \ldots \overline{M}'_{tk} \| \cdot A \cdot | \{ \overline{M}_{1m} \overline{M}_{2m} \ldots \overline{M}_{tm} \} |; \quad (14.12)$$

$$\Delta_{kP} = \| \overline{M}'_{1k} \overline{M}'_{2k} \ldots \overline{M}'_{tk} \| \cdot A \cdot | \{ M^0_{1P} M^0_{2P} \ldots \overline{M}^0_{tP} \} |, \quad (14.13)$$

donde en dependencia de las condiciones: $\overline{M}'_{ik}$ por (11.55) o por (11.63), $\overline{M}_{im}$ y $\overline{M}_{iP}$ por (11.57) o por (11.65), A_i por (11.56) o por (11.64) y A por (11.60). En correspondencia con esto, la matriz de los coeficientes de las ecuaciones canónicas (14.6) se puede pre-

sentar así:

$$D = \| \delta_{hm} \| = \overline{M}' A M =$$

$$= \begin{Vmatrix} \overline{M}'_{11}\overline{M}'_{21} \dots \overline{M}'_{t1} \\ \overline{M}'_{12}\overline{M}'_{22} \dots \overline{M}'_{t2} \\ \dots\dots\dots \\ \overline{M}'_{1n}\overline{M}'_{2n} \dots \overline{M}'_{tn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_1 00 \dots 0 \\ 0 A_2 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 000 \dots A_t \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \overline{M}_{11}\overline{M}_{12} \dots \overline{M}_{1n} \\ \overline{M}_{21}\overline{M}_{22} \dots \overline{M}_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \overline{M}_{t1}\overline{M}_{2t} \dots \overline{M}_{tn} \end{Vmatrix}; \quad (14.14)$$

n–líneas, t–columnas — t–líneas, t–columnas — t–líneas, n–columnas

En forma análoga escribimos

$$D_P = \overline{M}' \cdot A \cdot M^0_P =$$

$$= \begin{Vmatrix} \overline{M}'_{11}\overline{M}'_{21} \dots \overline{M}'_{t1} \\ \overline{M}'_{12}\overline{M}'_{22} \dots \overline{M}'_{t2} \\ \dots\dots\dots \\ \overline{M}'_{1n}\overline{M}'_{2n} \dots \overline{M}'_{tn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_1 00 \dots 0 \\ 0 A_2 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 000 \dots A_t \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M^0_{1P} \\ M^0_{2P} \\ \dots \\ M^0_{tP} \end{Vmatrix}. \quad (14.15)$$

Si el cálculo se efectúa para varias cargas diferentes por separado, entonces, en (14.15), la matriz de columna de M^0_P se transforma en una matriz que contiene tantas columnas, como cargas separadas haya.

Colocando lo obtenido de (14.14) y (14.15) en las ecuaciones canónicas (14.6), las obtenemos en la forma siguiente:

$$\overline{M}' A \cdot \overline{M} \cdot X + \overline{M}' \cdot A \cdot M^0_P = 0. \quad (14.16)$$

De lo dicho se desprende que, para la determinación de los coeficientes y miembros libres de las ecuaciones canónicas es indispensable tener las expresiones analíticas de las fuerzas sustituyentes M, N y Q, para todas las barras del sistema básico o sus diagramas, debidos a todas las incógnitas $X_k = 1$ y a la carga dada para las barras rectas de sección constante.

Una vez compuesto el sistema de ecuaciones canónicas en forma numérica, éste puede ser resuelto con respecto a las incógnitas básicas $X_1, X_2, \dots, X_n$.

§ 123. FUERZAS SUSTITUYENTES (INTERNAS) DEBIDAS A LA CARGA EN LOS SISTEMAS HIPERESTATICOS Y CONSTRUCCION DE SUS DIAGRAMAS. Como resultado de la resolución del sistema de ecuaciones canónicas obtenemos el valor de las incógnitas básicas $X_1, X_2, \dots, X_n$. A continuación, las fuerzas sustituyentes y las reacciones en el sistema dado, que se determinan por el estado indeformado del sistema y, otras magnitudes

que permiten el empleo del principio de independencia de acción de las fuerzas, pueden ser hallados por la siguiente expresión:

$$S = \overline{S}_1 X_1 + \overline{S}_2 X_2 + \ldots + \overline{S}_n X_n + S^0_P, \qquad (14.17)$$

donde: S es la magnitud a determinar (la fuerza sustituyente M, N, Q; la reacción R del apoyo; el desplazamiento Δ, etc.) en el sistema dado; $\overline{S}_k$ es la magnitud a determinar debida a $X_k = 1$ en el sistema básico y S^0_P es la magnitud debida a la carga en el sistema básico.

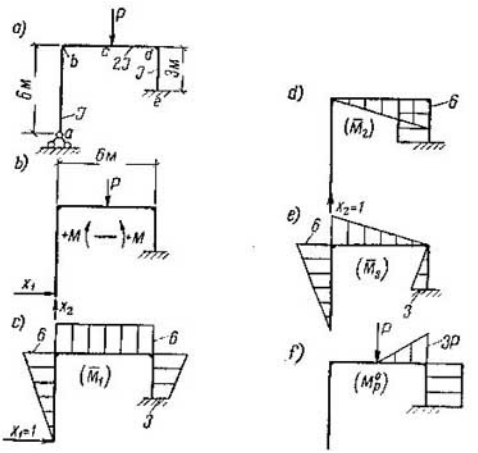


Fig. 265

Los diagramas de las fuerzas sustituyentes y de otras magnitudes, pueden ser también construidos sobre la base de este principio por la expresión análoga

$$(S) = (\overline{S}_1) X_1 + (\overline{S}_2) X_2 + \ldots + (\overline{S}_n) X_n + (S^0_P), \qquad (14.18)$$

donde: (S) es el diagrama de M, Q o N, debido a la carga en el sistema dado; $(\overline{S}_k)$ es el diagrama de $\overline{M}_k$, $\overline{Q}_k$ o $\overline{N}_k$, debido a $X_k = 1$ en el sistema básico y, $(S)^0_P$ es el diagrama de M_P, Q_P o N_P, debido a la carga, en el sistema básico.

Al producto $(\overline{S}_k)\, X_k$ lo llamaremos diagrama corregido o simplemente, diagrama debido a X_k.

Los diagramas de las fuerzas sustituyentes se pueden construir, también directamente sobre el sistema básico, sin recurrir a la suma de los diagramas corregidos por (14.18). Para esto es necesario examinar el sistema básico bajo la acción de la carga y de los valores hallados de las incógnitas básicas X_k.

Por ejemplo, el vector $\vec{S}_P$ de los momentos flectores para la construcción del diagrama de M_P en la forma matriz se escribe así:

$$M_P = \overline{M} \cdot X + M_{1P}^0 = \left\| \begin{matrix} \overline{M}_{11} \overline{M}_{12} \dots \overline{M}_{1n} \\ \overline{M}_{21} \overline{M}_{22} \dots \overline{M}_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \overline{M}_{t1} \overline{M}_{t2} \dots \overline{M}_{tn} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} M_{1P}^0 \\ M_{2P}^0 \\ \dots \\ M_{nP}^0 \end{matrix} \right\|. \qquad (14.19)$$

Ejemplo 29. Construir el digrama de los momentos flectores en el pórtico de la fig. 265, en la forma corriente y matriz. El sistema es de doble invariación estática. Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

En la fig. 265 se dan todos los diagramas necesarios para el cálculo y las verificaciones.

1. Cálculo corriente

a) Por la fórmula (11.45):

$$\delta_{11} = \frac{6}{6EJ}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{6}{6 \cdot 2EJ}(6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6) + \\ + \frac{3}{6EJ}(6 \cdot 6 + 4 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}5 + 3 \cdot 3) = \frac{243}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{6}{6 \cdot 2EJ}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{3}{6EJ}(6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6) = \frac{144}{EJ};$$

$$\delta_{12} = -\frac{6}{6 \cdot 2EJ}(0 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot 6) - \frac{3}{6EJ}(6 \cdot 6 + 4 \cdot 4{,}5 \cdot 6 + 6 \cdot 3) = -\frac{135}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{3}{6 \cdot 2EJ}(0 \cdot 6 + 4 \cdot 1{,}5P \cdot 6 + 3P \cdot 6) + \frac{3}{6EJ} \cdot (3P \cdot 6 + 4 \cdot 3P \cdot 4{,}5 + 3P \cdot 3) = \frac{54P}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{3}{6 \cdot 2EJ}(0 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5P \cdot 4{,}5 + 3P \cdot 6) - \frac{3}{6EJ}(3P \cdot 6 + 4 \cdot 3P \cdot 6 + 3P \cdot 6) = \\ = -\frac{65{,}25P}{EJ}.$$

Verificaciones: [véase (14.31) y (14.32)].
Suma de coeficientes

$$\delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = \frac{1}{EJ}(243 + 144 - 2 \cdot 135) = \frac{117}{EJ}.$$

$$(\overline{M}_S) \cdot (\overline{M}_S) = \frac{6}{6EJ}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{6}{6 \cdot 2EJ}(6 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0) + \\ + \frac{3}{6EJ}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 3) = \frac{117}{EJ}.$$

Suma de los miembros de carga

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{1}{EJ}(54P - 65{,}25P) = -\frac{11{,}25P}{EJ}.$$

$$(M_P^0) \cdot (\overline{M}_S) = \frac{3}{6 \cdot 2EJ}(0 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5P \cdot 1{,}5 + 3P \cdot 0) - \frac{3}{6EJ}(3P \cdot 0 + 4 \cdot 3P \cdot 1{,}5 + \\ + 3P \cdot 3) = -\frac{11{,}25P}{EJ}.$$

b) Por la fórmula (11.43):

$$\delta_{11}=\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{EJ}+\frac{6\cdot 6\cdot 6}{2EJ}+3\cdot 3\cdot 4{,}5+\frac{3\cdot 3}{2}\left(3+\frac{2}{3}\cdot 3\right)=\frac{243}{EJ};$$

$$\delta_{22}=\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{2EJ}+\frac{6\cdot 3\cdot 6}{EJ}=\frac{144}{EJ};$$

$$\delta_{12}=-\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{6}{2EJ}-\frac{6+3}{2}3\,\frac{6}{EJ}=-\frac{135}{EJ};$$

$$\Delta_{1P}=\frac{3\cdot 3P}{2}\cdot\frac{6}{2EJ}+\frac{3P\cdot 3\cdot 4{,}5}{EJ}=\frac{54P}{EJ};$$

$$\Delta_{2P}=-\frac{3\cdot 3P}{2}\cdot\frac{5}{2EJ}-\frac{3P\cdot 3\cdot 6}{EJ}=-\frac{65{,}25P}{EJ}.$$

Verificaciones:

$$(\overline{M}_S)\cdot(\overline{M}_S)=\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}6\,\frac{1}{EJ}+\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}6\,\frac{1}{2EJ}+\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}3\,\frac{1}{EJ}=\frac{117}{EJ};$$

$$(M_P^0)\cdot(\overline{M}_S)=\frac{3P\cdot 3}{2}\cdot\frac{1}{3}3\,\frac{1}{2EJ}-3P\cdot 3\,\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{EJ}=-\frac{11{,}25P}{EJ}.$$

Las ecuaciones canónicas en cifras, son:

$$\left\{\begin{array}{l}243X_1-135X_2+54P=0;\\ -135X_1+144X_2-65{,}25P=0.\end{array}\right.$$

De ellas obtenemos: $X_1=0{,}0615942P$, $X_2=0{,}5108696P$.
El diagrama de momentos lo componemos por (14.18):

$$(M_P)=(\overline{M}_1)\,X_1+(\overline{M}_2)\,X_2+(M_P^0).$$

El diagrama está representado en la fig. 266. Efectuamos su verificación por (14.33), empleando (11.45) y considerando en la viga horizontal dos partes:

$$\begin{aligned}(M_P)\cdot(\overline{M}_S)=&\frac{6}{6EJ}(0\cdot 0+4\cdot 3\cdot 0{,}1848P+6\cdot 0{,}3696P)+\\&+\frac{3}{6\cdot 2EJ}(6\cdot 0{,}3696P-4\cdot 4{,}5\cdot 0{,}39675P-3\cdot 1{,}1631P)+\\&+\frac{3}{6\cdot 2EJ}(-3\cdot 1{,}1631P-4\cdot 1{,}5\cdot 0{,}4294P+0\cdot 0{,}3043P)+\\&+\frac{3}{6EJ}(0\cdot 0{,}3043P-4\cdot 1{,}5\cdot 0{,}21195P-3\cdot 0{,}1196P)=\\&=\frac{4{,}4352P}{EJ}-\frac{4{,}4350P}{EJ}\approx 0.\end{aligned}$$

Lo mismo, empleando (11.43):

$$\begin{aligned}(M_P)\cdot(\overline{M}_S)=&\frac{0{,}3696P\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{EJ}+\frac{0{,}3696P\cdot 3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}6+\frac{1}{3}3\right)\frac{1}{2EJ}-\\&-\frac{1{,}1631P\cdot 3}{2}\left(\frac{1}{3}6+\frac{2}{3}\cdot 3\right)\frac{1}{2EJ}-\frac{1{,}1631P\cdot 3}{2}\left(\frac{2}{3}3+\frac{1}{3}0\right)\frac{1}{2EJ}+\\&+\frac{0{,}3043P\cdot 3}{2}\left(\frac{1}{3}3+\frac{2}{3}0\right)\frac{1}{2EJ}-\frac{0{,}3043P\cdot 3}{2}\left(\frac{2}{3}0+\frac{1}{3}3\right)\frac{1}{EJ}-\\&-\frac{0{,}1196P\cdot 3}{2}\left(\frac{1}{3}0+\frac{2}{3}3\right)\frac{1}{EJ}=\frac{4{,}4352P}{EJ}-\frac{4{,}4350P}{EJ}\approx 0.\end{aligned}$$

2. Cálculo en la forma matriz

Para el cálculo, en la forma matriz, convenimos considerar positivos a los momentos flectores que en los diagramas están trazados dentro del contorno. Adoptamos $J_0 = J$. Por la fórmula (14.14):

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_1) = \|0\ -6\|\frac{6}{6EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0\\ 6\end{Vmatrix} + \|-6\ -6\|\frac{6}{6EJ}\begin{Vmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix}-6\\ -6\end{Vmatrix} + \|-6\ -3\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-6\\ -3\end{Vmatrix} = \frac{243}{EJ};$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2)\cdot(\overline{M}_2) = \|0\ -6\|\frac{6}{6EJ}\begin{Vmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0\\ 6\end{Vmatrix} + \|6\ \ 6\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}6\\ 6\end{Vmatrix} = \frac{144}{EJ};$$

$$\delta_{12} = (\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_2) = \|-6\ -6\|\frac{6}{6EJ}\begin{Vmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0\\ 6\end{Vmatrix} + \|-6\ -3\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix}6\\ 6\end{Vmatrix} = -\frac{135}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = (M_P^0)\cdot(\overline{M}_1) = \|-6\ -6\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0\\ -3P\end{Vmatrix} +$$

$$+\|-6\ -3\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-3P\\ -3P\end{Vmatrix} = -\frac{54P}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = (M_P^0)\cdot(\overline{M}_1) = \|3\ \ 6\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-0\\ -3P\end{Vmatrix} +$$

$$+\|6\ \ 6\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-3P\\ -3P\end{Vmatrix} = -\frac{65{,}25P}{EJ}.$$

Verificaciones:

$$\delta_{SS} = (\overline{M}_S)\cdot(\overline{M}_S) = \|0\ -6\|\frac{6}{6JE}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0\\ -6\end{Vmatrix} + \|-6\ \ 0\|\frac{6}{6EJ}\begin{Vmatrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-6\\ 0\end{Vmatrix} +$$

$$+\|0\ \ 3\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0\\ 3\end{Vmatrix} = \frac{117}{EJ};$$

$$(M_P^0)\cdot(\overline{M}_S) = \|0\ \ -3P\|\frac{3}{6\cdot 2EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-3\\ 0\end{Vmatrix} +$$

$$+\|-3P\ -3P\|\frac{3}{6EJ}\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0\\ 3\end{Vmatrix} = -\frac{11{,}25P}{EJ}.$$

El diagrama de momentos lo componemos por la igualdad

$$(M) = \overrightarrow{MP} = \begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ -6 & 0 & 0\\ -6 & 3 & 0\\ -6 & 6 & -3\\ -3 & 6 & -3\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0{,}0615942P\\ 0{,}5108696P\\ P\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}0\\ -0{,}3695P\\ 1{,}1631P\\ -0{,}3043P\\ -0{,}1196P\end{Vmatrix}.$$

Aquí, las columnas de la matriz M han sido obtenidas por los diagramas de los momentos $(\overline{M}_1)$, $(\overline{M}_2)$ y (M_P^0) para los puntos a, b, c, d, y e.

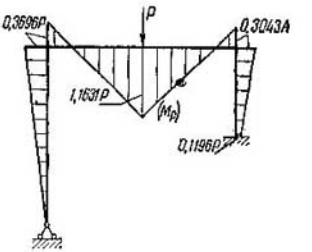


Fig. 266

El diagrama de momentos se expone en la fig. 266.

Verificamos el diagrama obtenido:

$$(M_P)\cdot(\overline{M}_S)=\|\,0\;-6\,\|\frac{6}{6EJ}\left\|\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}0\\ -0{,}3696P\end{matrix}\right\|+$$

$$+\|\,-6\;-3\,\|\frac{3}{6EJ}\left\|\begin{matrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-0{,}3696P\\ 1{,}1631P\end{matrix}\right\|+\|\,-3\;0\,\|\frac{3}{6EJ}\left\|\begin{matrix}1 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 1\end{matrix}\right\|\times$$

$$\times\left\|\begin{matrix}1{,}1631P\\ -0{,}3043P\end{matrix}\right\|+\|\,0\;3\,\|\frac{3}{6EJ}\left\|\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-0{,}3043P\\ -0{,}1196P\end{matrix}\right\|=\frac{4{,}4352P}{EJ}-\frac{4{,}4350P}{EJ}\approx 0.$$

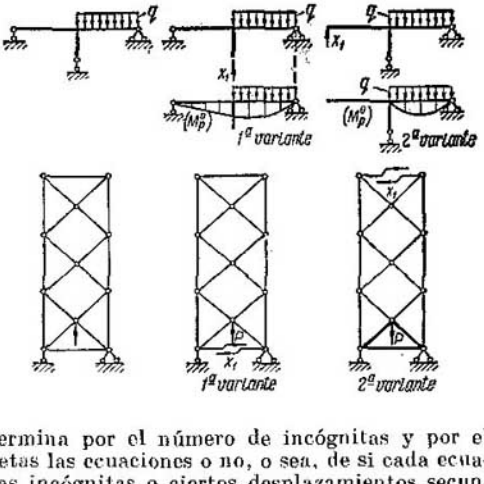
§ 124. SOBRE EL SISTEMA BASICO DEL METODO DE FUERZAS. Si las operaciones se efectúan con exactitud, para el cálculo puede ser adoptado cualquier sistema básico invariante, obtenido del dado (véase la fig. 259). Pero no todo sistema básico es cómodo para el cálculo, particularmente si el cálculo se hace a mano o con «poca mecanización» en forma de máquinas de mesa con teclas.

La invariación del sistema básico es una propiedad imprescindible para darle comodidad al sistema, pero no suficiente. De ahí la importancia de elegir, de los sistemas básicos, aquel ante el cual, el cálculo se efectuaría en la forma más simple.

El cálculo se compone de las siguientes operaciones: de la composición de las expresiones de las fuerzas internas debidas a las incógnitas unitarias y a las cargas en el sistema básico o, la construcción de sus diagramas sobre las barras rectas de las vigas y los pórticos; de la determinación, por estas expresiones o por los diagramas, de los coeficientes y miembros libres de las ecuaciones canónicas; de la resolución de estas últimas y de la composición de las expresiones de las fuerzas internas o la construcción de los diagramas buscados en el sistema dado.

La complejidad de la composición de las expresiones de las fuerzas internas en el sistema básico y de la construcción de sus diagramas, así como de la construcción de los diagramas buscados en el sistema dado, depende del sistema básico elegido. La complejidad de la determinación de los coeficientes y miembros libres se determina por la complejidad de las expresiones, de las fuerzas internas, indispensables para el cálculo, o por la complejidad de sus diagramas en el sistema básico. Por fin, la complejidad de la resolución de

Fig. 267



las ecuaciones se determina por el número de incógnitas y por el hecho de si son completas las ecuaciones o no, o sea, de si cada ecuación contiene todas las incógnitas o ciertos desplazamientos secundarios son iguales a cero.

El número de incógnitas básicas es imposible de variar, éste es idéntico para todos los sistemas básicos formados del dado. A veces, la elección del sistema básico permite reducir a cero los desplazamientos secundarios, lo cual puede simplificar considerablemente la resolución de las ecuaciones. La sencillez de las expresiones analíticas y de los diagramas de las fuerzas internas debidas a las incógnitas unitarias y a la carga, también puede lograrse, a veces, con la correspondiente elección del sistema básico.

De lo dicho se desprenden los siguientes requerimientos para un sistema básico cómodo: 1) deberá reducirse a cero el mayor número posible de desplazamientos secundarios y 2) las expresiones de las fuerzas sustituyentes debidas a las incógnitas unitarias y a la carga, o a sus diagramas, deberán ser lo más simple posible.

Para la elección de un sistema básico cómodo es difícil dar cualquier tipo de indicaciones determinadas, por cuanto ellas dependen de las características concretas del sistema hiperestático que se examina. Se puede señalar que, para la indeterminación externa de un sistema, la eliminación de vínculos internos en lugar de externos, hablando en general, da la posibilidad de elegir un sistema más cómodo. En general, la cuestión sobre la elección del sistema básico más cómodo se resuelve sobre la base del análisis de sus variantes posibles.

Por ejemplo, en la fig. 267 se expone la comparación de dos variantes de sistemas básicos. Las segundas variantes son más cómodas que las primeras por el hecho de que en ellas las fuerzas

sustituyentes debidas a la carga se determinan con más facilidad. En la segunda variante, el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga, en el pórtico, existirá sólo en un tramo, y será simple, mientras que en la primera variante, en dos tramos y además será complicado. En la segunda variante del sistema básico de la armadura, las fuerzas longitudinales debidas a la carga son distintas de cero en tres barras y, en la primera variante, en casi todas.

§ 125. CONSTRUCCION DE LOS DIAGRAMAS DE LAS FUERZAS TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES. Si en un sistema hiperestático compuesto por barras rectas, el diagrama de los momentos flectores es conocido (fig. 268, *a*), entonces, los diagramas de Q y N pueden ser construidos con más facilidad que por la fórmula general (14.18). Al principio se construye el diagrama de Q por el de M y luego, el diagrama de N por el de Q.

La construcción del diagrama de Q por el de M se basa en el equilibrio de la barra seccionada del sistema o de parte de ella. Al seccionar una barra es necesario aplicarle la carga y, a sus extremos, las fuerzas transversales y longitudinales incógnitas Q y N y los momentos flectores conocidos M, tomados de los diagramas de momentos (fig. 268, *b*). A las designaciones de las fuerzas internas las vamos a acompañar con los índices de la barra en que ellas actúan. El primer índice deberá indicar el extremo de la barra sobre el que actúa esta fuerza interna.

De la ecuación $\Sigma M_b = 0$ se determina Q_{ab}, después de lo cual, sobre la barra seccionada, se construye el diagrama de Q, como en una viga, por medio del trazado de las proyecciones de las fuerzas izquierdas sobre el eje perpendicular a la barra o por medio de la composición de la expresión analítica de los momentos flectores M y el empleo de la conocida dependencia diferencial $Q = \frac{dM}{ds}$.

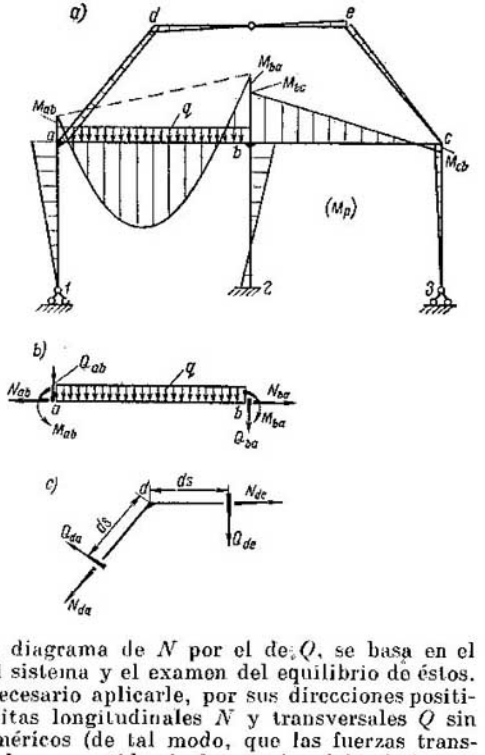
De acuerdo con esta dependencia diferencial, la fuerza transversal es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente al diagrama de los momentos flectores. Esta es positiva, si el ángulo $\alpha < 90°$ de inclinación de la línea tangente al diagrama de los momentos M, construido por el lado de la zona traccionada, corresponde al giro desde el eje de la barra, en sentido de las agujas del reloj.

Si en cualquier barra o trozo de barra de longitud l, el diagrama de momentos flectores es recto, entonces, según las normas adoptadas corrientemente para los signos, colocando este trozo horizontalmente, obtenemos:

$$Q = \frac{M_{der} - M_{izq}}{l}, \qquad (14.20)$$

donde: M_{der} es el momento flector en el extremo derecho;
M_{izq}, el momento flector en el extremo izquierdo.

Fig. 268



La construcción del diagrama de N por el de Q, se basa en el recorte de los nudos del sistema y el examen del equilibrio de éstos. Al nudo recortado es necesario aplicarle, por sus direcciones positivas, las fuerzas incógnitas longitudinales N y transversales Q sin indicar sus valores numéricos (de tal modo, que las fuerzas transversales Q giren al nudo en sentido de las agujas del reloj), con los índices que indican las barras sobre las cuales estas fuerzas actúan. A continuación, de las ecuaciones de equilibrio, en forma de la suma de proyecciones de las fuerzas sobre dos ejes, las fuerzas incógnitas longitudinales se expresan, en general, por medio de las fuerzas conocidas Q, después de lo cual se colocan los valores numéricos de Q con sus respectivos signos. Por cuanto las ecuaciones de equilibrio se emplean en forma de la suma de las proyecciones de las fuerzas, los momentos flectores pueden no aplicarse a los nudos recortados. Dado que de las proyecciones de las fuerzas sobre un par de ejes se pueden hallar sólo dos fuerzas incógnitas N, entonces, su determinación debe iniciarse con el recorte del nudo en el cual convergen únicamente dos elementos. Luego, se deberá pasar, sucesivamente, al recorte de aquellos nudos que contengan no más de dos incógnitas. Por ejemplo, en la fig. 268, es necesario comenzar

con el recorte de los nudos d o e y, después pasar al nudo a o al c. Con los procedimientos usuales, por la fuerza N_{da} hallada en el nudo d, se determina N_{ad}. Después de esto, del recorte del nudo a, pueden ser halladas las fuerzas longitudinales N_{at} y N_{ab}, etc.

§ 126. ECUACIONES CANONICAS, PARA EL CALCULO DE LA ACCION DE LA TEMPERATURA Y LA DISLOCACION DE LOS APOYOS. Las ecuaciones canónicas, durante el cálculo de la acción de la temperatura, tienen el aspecto:

$$\delta_{h1}X_1+\delta_{h2}X_2+\ldots+\delta_{hn}X_n+\Delta_{ht}=0, \qquad (14.21)$$

donde Δ_{ht} es el desplazamiento en el sistema básico por la dirección de la incógnita X_h debido a la acción de la temperatura.

El desplazamiento Δ_{ht} se determina por la expresión (11.38):

$$\Delta_{ht}=\sum\int \overline{N}_h\Delta\, ds_t+\sum\int \overline{M}_h\Delta\, d\varphi_t, \qquad (14.22)$$

donde $\Delta\, ds_t$ y $\Delta d\,\varphi_t$ se hallan por las fórmulas (11.20) y (11.21).

Para los sistemas compuestos de barras rectas, siendo constante la temperatura a lo largo de la barra, la fórmula (14.22) puede ser presentada en la forma siguiente:

$$\Delta_{ht}=\sum\frac{\beta}{h}\,(t_1h_2+t_2h_1)\,\Omega_{\overline{N}_h}+\sum\beta\,\frac{t_2-t_1}{h}\,\Omega_{\overline{M}_h}, \qquad (14.22')$$

donde

$\Omega_{\overline{N}_h}$ y $\Omega_{\overline{M}_h}$ son las respectivas áreas de los diagramas de las fuerzas longitudinales y los momentos flectores debidos a $X_h=1$;

t_1 y t_2 son los incrementos de las temperaturas correspondientes a los lados comprimido y traccionado de la barra (véase la fig. 202, c);

β es el coeficiente de dilatación lineal térmica.

El diagrama de los momentos flectores, debidos a la acción de la temperatura, se compone por la expresión (14.18):

$$(\boldsymbol{M}_t)=(\overline{\boldsymbol{M}}_1)\,X_1+(\overline{\boldsymbol{M}}_2)\,X_2+\ldots+(\overline{\boldsymbol{M}}_n)\,X_n. \qquad (14.23)$$

Durante el cálculo de la dislocación de los apoyos, convenimos en obtener el sistema básico, sólo seccionando (no eliminando) los vínculos e introduciendo articulaciones. Esto da la posibilidad, cuando hay dislocación de los apoyos, de escribir las ecuaciones canónicas en la siguiente forma:

$$\delta_{h1}X_1+\delta_{h2}X_2+\ldots+\delta_{hn}X_n+\Delta_{h\Delta}=0, \qquad (14.24)$$

donde $\Delta_{h\Delta}$ es el desplazamiento por la dirección de la incógnita X_h, debido a la dislocación de los mismos apoyos en el sistema básico.

Este desplazamiento puede ser determinado o sobre la base de consideraciones puramente geométricas o por la fórmula

$$\Delta_{k\Delta} = -\sum \overline{R}_k \Delta_m, \qquad (14.25)$$

donde $\overline{R}_k$ son las reacciones de los apoyos, en el sistema básico, debidas a $X_k = 1$, y Δ_m, los desplazamientos de los apoyos, por sus direcciones, en el sistema dado.

Para poner en claro el empleo de la fórmula de los desplazamientos debidos a la dislocación de los apoyos, examinemos una viga

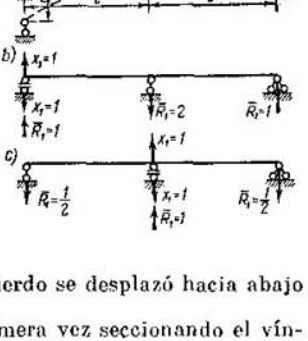


Fig. 269

de dos tramos, en la que el apoyo izquierdo se desplazó hacia abajo en un valor Δ (fig. 269).

El sistema básico se obtiene por primera vez seccionando el vínculo de apoyo izquierdo (fig. 269, *b*).

Las reacciones debidas a la fuerza $X_1 = 1$ se muestran en la figura. Por la fórmula (14.25)

$$\Delta_{1\Delta} = -(-1\Delta) = \Delta.$$

Pero si el sistema básico se elige seccionando el vínculo de apoyo del medio (fig. 269, *c*), entonces, $\Delta_{1\Delta} = -\frac{1}{2}\Delta = -\frac{\Delta}{2}$.

El diagrama de los momentos flectores debidos a la dislocación de los apoyos se determina por la expresión

$$(M_\Delta) = (\overline{M}_1) X_1 + (\overline{M}_2) X_2 + \ldots + (\overline{M}_n) X_n. \qquad (14.26)$$

Por cuanto Δ_{kt} y $\Delta_{k\Delta}$ no dependen de la rigidez del sistema y los coeficientes de las ecuaciones canónicas δ_{km} son inversamente proporcionales a las rigideces, entonces, las incógnitas básicas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, debidas a la acción de la temperatura y a la dislocación de los apoyos, aumentan con el crecimiento de la rigidez del sistema.

§ 127. DESPLAZAMIENTOS EN LOS SISTEMAS HIPERESTÁTICOS

1. DESPLAZAMIENTOS DEBIDOS A LA CARGA

Al deducir la fórmula general de los desplazamientos, fue utilizado el estado auxiliar del mismo sistema, con la fuerza $P_k = 1$ por la dirección del desplazamiento buscado, independientemente de cómo es el propio sistema. Por consiguiente, tal estado auxiliar puede ser empleado para los sistemas hiperestáticos, y el desplazamiento se puede hallar por la fórmula

$$\Delta_{kP} = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_P}{EJ} ds. \qquad (a)^*$$

No obstante, esto no es cómodo, puesto que el sistema hiperestático (fig. 270) se tendría que calcular dos veces: bajo la carga,

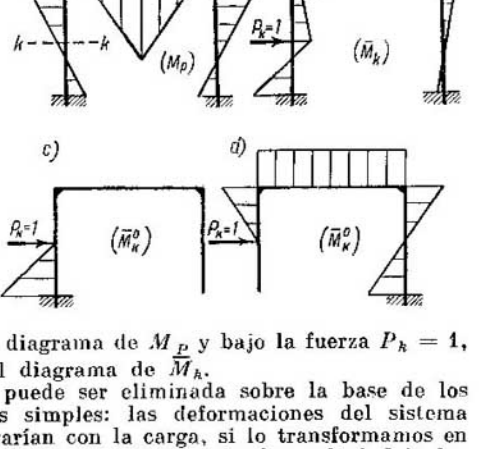


Fig. 270

para la construcción del diagrama de M_P y bajo la fuerza $P_k = 1$, para la construcción del diagrama de $\overline{M}_k$.

Esta inconveniencia puede ser eliminada sobre la base de los siguientes razonamientos simples: las deformaciones del sistema hiperestático dado, no varían con la carga, si lo transformamos en un sistema cualquiera estáticamente determinado, aplicándole las reacciones de los vínculos excluidos. En este caso, tenemos la posibilidad de determinar los desplazamientos en este sistema estáticamente determinado nuevo obtenido del dado. Esto significa que el estado auxiliar con la fuerza $P_k = 1$ no estará en el sistema dado, sino, en el sistema estáticamente determinado, para el que las expresiones y el diagrama de los momentos $\overline{M}^0_k$ se hallan sim-

* Para abreviar la exposición, nos limitaremos a un solo sumando en la fórmula de los desplazamientos.

plemente (fig. 270, *c*, *d*). El desplazamiento buscado es igual a:

$$\Delta_{kP} = \sum \int \overline{M}_k^0 \frac{M_P}{EJ}\, ds. \qquad (b)$$

Mostremos aún que se puede proceder de otro modo, obtener las expresiones de los momentos debidos a la carga y su diagrama M_P en el sistema estáticamente determinado y, las de los debidos a la fuerza unitaria $P_k = 1$, en el sistema hiperestático dado. Para esto examinemos el trabajo de la carga, aplicada al sistema hiperestático en los desplazamientos debidos a la fuerza $P_k = 1$

$$\sum P_k \delta_{Pk} = \sum \int M_P \frac{\overline{M}_k}{EJ}\, ds = \Delta_{kP}. \qquad (c)$$

Transformemos ahora el sistema dado, en un sistema cualquiera estáticamente determinado (fig. 271) y apliquémosle la carga que

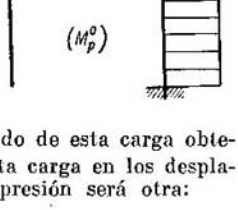


Fig. 271

actuaba sobre el heperestático. Como resultado de esta carga obtenemos el diagrama de $\overline{M}_k^0$. El trabajo de esta carga en los desplazamientos anteriores, no varía, pero su expresión será otra:

$$\sum P_k \delta_{Pk} = \sum \int M_P^0 \frac{\overline{M}_k}{EJ}\, ds. \qquad (d)$$

De las igualdades de los trabajos (c) y (*d*) y de las otras igualdades (a) y (b) obtenemos

$$\Delta_{kP} = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_P}{EJ}\, ds = \sum \int \overline{M}_k^0 \frac{M_P}{EJ}\, ds = \\ = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_P^0}{EJ}\, ds. \qquad (14.27)$$

De aquí se desprende la siguiente regla: *para la determinación de los desplazamientos debidos a la carga, en los sistemas hiperestáticos, deberemos aplicar la fuerza auxiliar* $P_k = 1$ *a cualquier sistema estáticamente determinado que puede ser obtenido del sistema dado*, o aplicarla al sistema hiperestático dado y, la carga, a cualquier sistema estáticamente determinado obtenido de él y, en adelante, determinar el desplazamiento por la fórmula general de los desplazamientos, en el orden usual.

Si al calcular las integrales en (14.27), los sistemas permiten el empleo del procedimiento de multiplicación de diagramas, entonces,

esta expresión será:

$$\Delta_{kP} = (\boldsymbol{M}_P) \cdot (\overline{\boldsymbol{M}}_k) = (\boldsymbol{M}_P) \cdot (\overline{\boldsymbol{M}}_k^0) = (\boldsymbol{M}_P^0) \cdot (\overline{\boldsymbol{M}}_k). \quad (14.27').$$

En este caso, al determinar los desplazamientos debidos a la carga, uno de los diagramas, debidos a la carga o a la fuerza $P_k = 1$, puede ser tomado en cualquier sistema estáticamente determinado obtenido del dado y, el otro, indispensablemente, del sistema hiperestático dado.

Dado que en un sistema hiperestático, la composición de las expresiones de las fuerzas internas, o de sus diagramas, debidas a la fuerza unitaria $P_k = 1$, a veces resulta más simple que las debidas a la carga dada, entonces, en aquellos casos, cuando esto es posible, es necesario que tal simplificación sea utilizada.

Si los desplazamientos se determinan por los pesos elásticos, entonces, estos últimos, deben determinarse por el estado auxiliar (véase la fig. 228, *d*), en cualquier sistema estáticamente determinado obtenido del dado.

Si los desplazamientos se calculan teniendo en cuenta las fuerzas longitudinales y transversales, entonces, las demostraciones análogas se pueden efectuar de una manera más general, con el empleo de los símbolos $(\boldsymbol{L})$, según (11.41).

2. DESPLAZAMIENTOS DEBIDOS A LA ACCION DE LA TEMPERATURA Y A LAS DISLOCACIONES DE LOS APOYOS

Los desplazamientos debidos a la acción de la temperatura y a las dislocaciones de los apoyos de los sistemas hiperestáticos pueden ser descompuestos en dos sumandos: los debidos a las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$ y los debidos al efecto de la temperatura o a la dislocación de los apoyos, en el sistema estáticamente determinado. Por eso, *para la determinación de los desplazamientos debidos a la acción de la temperatura o a las dislocaciones de los apoyos en los sistemas hiperestáticos, es necesario aplicar la fuerza* $P_k = 1$ *a cualquier sistema estáticamente determinado, obtenido del sistema dado y, luego, sumar los desplazamientos de tal sistema estáticamente determinado, debidos a las incógnitas básicas, a los desplazamientos debidos a la acción de la temperatura* Δ_{kt}^0 *o a las dislocaciones de los apoyos:*

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{kt} &= \sum \int \overline{M}_k^0 \frac{M_t}{EJ}\, ds + \Delta_{kt}^0, \\ \Delta_{k\Delta} &= \sum \int \overline{M}_k^0 \frac{M_\Delta}{EJ}\, ds + \Delta_{k\Delta}^0, \end{aligned}\right\} \quad (14.28)$$

donde

M_t y M_Δ son los momentos flectores debidos a la acción de la temperatura y a las dislocaciones de los apoyos en el sistema estáticamente indeterminado;

Δ^0_{kt} y $\Delta^0_{k\Delta}$, los desplazamientos debidos a la acción de la temperatura y a las dislocaciones de los apoyos en el sistema estáticamente determinado, al cual está aplicada la fuerza $P_k = 1$.

El desplazamiento Δ^0_{kt} se determina por la fórmula (14.22) y, el $\Delta^0_{k\Delta}$, por la (14.25).

Para los sistemas que permiten la «multiplicación» de diagramas:

$$\Delta_{kt} = (\boldsymbol{M}_t)\cdot(\overline{\boldsymbol{M}}^0_k) + \Delta^0_{kt}, \quad \Delta_{k\Delta} = (\boldsymbol{M}_\Delta)\cdot(\overline{\boldsymbol{M}}^0_k) + \Delta^0_{k\Delta}. \quad (14.28')$$

§ 128. VERIFICACION DEL CALCULO. Para evitar inexactitudes y errores, durante el cálculo, es necesario efectuar el control de todas sus operaciones.

Verificación durante el proceso de cálculo. La base de un cálculo correcto es la correcta elección del sistema básico, la composición correcta de las expresiones analíticas o la correcta construcción del diagrama de las fuerzas internas debidas a las incógnitas unitarias y la carga.

Por eso, antes que nada, es necesario verificar el sistema básico y las expresiones analíticas de las fuerzas sustituyentes (internas) o sus diagramas y luego, los coeficientes y miembros libres de las ecuaciones canónicas.

Supongamos, para abreviar la exposición, que el cálculo fue efectuado sólo teniendo en cuenta los momentos flectores en la fórmula de los desplazamientos. La demostración la vamos a efectuar en base al producto de los diagramas $(\overline{\boldsymbol{M}}_k)\cdot(\boldsymbol{M}_m) = \Delta_{km}$, sobreentendiendo, ante esto, que con tal símbolo sustituimos a la integral $\int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds$, en aquellos casos, cuando la multiplicación de los diagramas es imposible. Componemos el diagrama especial de $(\boldsymbol{M}_S)$ por los diagramas unitarios y el diagrama de carga:

$$(\boldsymbol{M}_S) = (\overline{\boldsymbol{M}}_1) + (\overline{\boldsymbol{M}}_2) + \ldots + (\overline{\boldsymbol{M}}_n) + (\boldsymbol{M}^0_P). \quad (14.29)$$

Lo multiplicamos por el diagrama unitario de $(\overline{\boldsymbol{M}}_k)$ debido a $X_k = 1$

$$\Delta_{Sk} = (\boldsymbol{M}_S)\cdot(\overline{\boldsymbol{M}}_k) = [(\overline{\boldsymbol{M}}_1) + (\overline{\boldsymbol{M}}_2) + \ldots + (\overline{\boldsymbol{M}}_n) + (\boldsymbol{M}^0_P)]\cdot\overline{\boldsymbol{M}}_k).$$

Desarrollando por miembros, obtenemos

$$\Delta_{Sk} = (\boldsymbol{M}_S)\cdot(\overline{\boldsymbol{M}}_k) = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \ldots + \delta_{kn} + \Delta_{kP}. \quad (14.30)$$

Esto significa que la suma de los coeficientes y el miembro k-ésimo libre de la ecuación canónica deberá ser igual al resultado del «producto» de tal diagrama especial de $(\boldsymbol{M}_S)$ por el diagrama de $(\overline{\boldsymbol{M}}_k)$ debido a $X_k = 1$.

Si este diagrama especial no contiene el diagrama debido a la carga, entonces, el resultado de la «multiplicación» de los diagramas (14.30) no contendrá el miembro Δ_{kP}. La propia verificación

lleva el nombre de *por líneas*. El defecto de tal verificación consiste en que se basa, también, en las mismas operaciones que la obtención de los coeficientes y los miembros libres que se comprueban (multiplicación de diagramas), lo cual significa que el error puede cometerse también, en la propia verificación. Por eso, en caso de desigualdad en (14.30), se desconoce donde fue cometido el error, en los cálculos anteriores o en la verificación. Por fin, si fuera establecido que el error fue cometido en los cálculos de δ_{km}, de todos modos, se ignora en cuál de ellos.

Pero si multiplicamos el diagrama especial de $(\overline{M}_S)$, llamado *diagrama unitario total*, compuesto sólo de diagramas unitarios, por sí mismo, entonces, tendremos que

$$\delta_{SS} = (\overline{M}_S)\cdot(\overline{M}_S) = [(\overline{M}_1)+(\overline{M}_2)+\ldots+(\overline{M}_n)]\times$$
$$\times\,[(\overline{M}_1)+(\overline{M}_2)+\ldots+(\overline{M}_n)].$$

Abreviando los paréntesis, obtenemos

$$\delta_{SS} = (\overline{M}_S)\cdot(\overline{M}_S) = \sum_{\substack{k=1,2\ldots,n\\ m=1,2\ldots,n}} \delta_{km} = \sum \delta_{kk} + \sum_{k\neq m} \delta_{km}. \qquad (14.31)$$

El resultado de la multiplicación del diagrama unitario total por sí mismo, es igual a la suma de todos los coeficientes de las ecuaciones canónicas o, de otra manera, igual a la suma de los coeficientes principales y al doble de la suma de los coeficientes secundarios dispuestos a un mismo lado de la diagonal principal de la matriz de las ecuaciones canónicas. Esta verificación se llama *universal*. Sus defectos son los mismos que los de la verificación por líneas. Por cuanto el resultado de la multiplicación del diagrama de $\overline{M}_S$, de por sí mismo es positivo, entonces, de esta verificación universal se desprende la importante propiedad

$$\sum \delta_{kk} + \sum_{k\neq m} \delta_{km} > 0.$$

Por fin, si multiplicamos el diagrama unitario total por el diagrama de carga M_P^0, entonces,

$$\Delta_{SP} = (\overline{M}_S)\cdot(M_P^0) = \Delta_{1P}+\Delta_{2P}+\ldots+\Delta_{nP}. \qquad (14.32)$$

Después de la verificación de los coeficientes y miembros libres, se efectúa la resolución de las ecuaciones canónicas. Si durante su resolución, las operaciones no fueron especialmente controladas, entonces, es indispensable colocar los valores encontrados de las incógnitas principales de X_k, en las ecuaciones iniciales, las cuales, si las incógnitas fueron correctamente halladas, deberán convertirse en identidades.

Si el cálculo se llevó a cabo teniendo en cuenta la influencia de todas las fuerzas internas M, N y Q sobre los desplazamientos, entonces, en las expresiones (14.30)-(14.32), es necesario introducir,

complementariamente, los productos de los diagramas de $\overline{N}_S$, $\overline{N}_k$, N_P^0, $\overline{Q}_S$, $\overline{Q}_k$ y Q_P^0, análogos a los de los diagramas de $\overline{M}_S$, $\overline{M}_k$ y M_P^0, contenidos en estas fórmulas, o llevar la demostración, en la forma general, con el empleo de los símbolos $(\overline{L}_S)$, $(\overline{L}_k)$ y $(\overline{L}_P^0)$, en correspondencia con la fórmula (11.41).

Verificación al final del cálculo. El diagrama de los momentos flectores será obtenido como resultado del cálculo, por la expresión (14.18)

$$(M_P) = (\overline{M}_1) X_1 + (\overline{M}_2) X_2 + \ldots + (\overline{M}_n) X_n + (M_P^0).$$

Si el cálculo fue efectuado teniendo en cuenta únicamente la influencia de los momentos flectores sobre los desplazamientos, entonces, es necesario verificar el diagrama obtenido, antes de construir con su ayuda el diagrama de las fuerzas transversales. Multipliquemos este diagrama por un diagrama unitario cualquiera, el de $(\overline{M}_k)$, debido a $X_k = 1$:

$$(M_P) \cdot (\overline{M}_k) = [(\overline{M}_1) X_1 + (\overline{M}_2) X_2 + \ldots + (\overline{M}_n) X_n + (M_P^0)] \cdot (\overline{M}_k).$$

Abriendo los paréntesis, obtendremos que

$$(M_P) \cdot (\overline{M}_k) = \delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \ldots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kP}.$$

Hemos obtenido el primer miembro de la k-ésima ecuación canónica, el cual deberá ser igual a cero. Esto significa que el resultado de la multiplicación de los diagramas de (M_P) y de $(\overline{M}_k)$, también deberá ser igual a cero. Por consiguiente, obtendremos el mismo resultado multiplicando el diagrama de $(\overline{M}_P)$ por el diagrama unitario total de $(\overline{M}_S)$, que contiene parte o todos los diagramas unitarios. Por eso

$$(M_P) \cdot (\overline{M}_k) = (M_P) (\overline{M}_S) = 0. \qquad (14.33)$$

Por cuanto el cálculo de un sistema hiperestático puede ser efectuado para cualquier sistema básico, entonces, los procedimientos de verificación expuestos, también son empleables para cualquier sistema básico. Todo esto lleva a la regla: *el resultado de la multiplicación del diagrama de* $(\overline{M}_P)$, *obtenido durante el cálculo bajo carga, por cualquier diagrama unitario de* $(\overline{M}_k)$ *o unitario totalizador de* $(\overline{M}_S)$, *en cualquier sistema básico, deberá ser igual a cero.*

Si el diagrama de (M) que se verifica se obtuvo del cálculo a la acción de la temperatura o la dislocación de los apoyos, entonces, a diferencia del diagrama obtenido en el caso de acción de la carga, no contiene el sumando M_P^0. Por eso, el resultado del producto de tales diagramas y del diagrama de $\overline{M}_k$, lo mismo que antes, es igual al primer miembro de la ecuación canónica sin los miembros libres y, el resultado del producto de ellos por el diagrama de $\overline{M}_S$ unitario

total, es la suma de los primeros miembros de las ecuaciones canónicas sin los miembros libres. De esto se desprende que, como resultado de la *multiplicación de los diagramas de los momentos flectores, obtenidos del cálculo del sistema a la acción de la temperatura o a la dislocación de los apoyos, por el diagrama unitario de los momentos flectores debido a* $X_k = 1$, *en cualquier sistema básico se obtendrá el miembro libre* Δ_{kt} *o* $\Delta_{k\Delta}$ *de la k-ésima ecuación canónica, referente al sistema básico adoptado para la verificación, con el signo contrario y, como resultado de su multiplicación por el diagrama unitario total, en cualquier sistema básico, se obtendrá la suma de todos los miembros libres* $\sum \Delta_{kt}$ *o* $\sum \Delta_{k\Delta}$, *referentes al mismo sistema básico y, también, con signo contrario.*

Si el cálculo fue efectuado teniendo en cuenta la influencia de M, Q y N sobre los desplazamientos, entonces, en la verificación expuesta más arriba, al igual que el diagrama de M se introducen los diagramas de N y Q.

En conclusión, se efectúan las verificaciones estáticas de los diagramas de M, Q y N, obtenidos del cálculo, basadas en el examen del equilibrio de las partes seccionadas del sistema.

Sin embargo, la sola verificación estática de los diagramas de M, Q y N no es suficiente, porque el diagrama de M, que frecuentemente sirve de base para la construcción de los de Q y N, se obtiene por la expresión (14.18) de los diagramas que satisfacen las verificaciones estáticas, para valores cualesquiera de las incógnitas básicas X_k.

§ 120. ALGUNAS SIMPLIFICACIONES EN EL METODO DE FUERZAS. Aquí se exponen los procedimientos que, en cierta medida, en alguna etapa, simplifican el cálculo a mano con poca mecanización.

1. SISTEMA BASICO HIPERESTATICO

El sistema básico en el método de fuerzas, como ya fue dicho, no deberá ser indispensablemente estáticamente determinado, pero sí, poseer menor grado de indeterminación estática que el sistema dado.

El sistema estáticamente determinado, frecuentemente se emplea porque, en muchos casos, el sistema básico, elegido con acierto, es **cómodo** para la construcción de los diagramas unitarios y de carga, necesarios para el cálculo.

No obstante, el sistema hiperestático posee sus ventajas, por cuanto exige la composición y resolución de menor cantidad de ecuaciones canónicas que el sistema básico estáticamente determinado, lo cual, para el cálculo a mano y con poca mecanización, es de mucha importancia. Así, por ejemplo, en el cálculo de un pórtico (fig. 272, *a*), el empleo del sistema básico estáticamente determinado (fig. 272, *b*) da cinco incógnitas básicas y, el empleo del sistema básico hiperestático (fig. 272, *c*), solamente dos.

Pero el sistema básico hiperestático exige su estudio previo, dado que en él, los diagramas indispensables para el cálculo no pueden ser construidos con medios simples. No obstante, de todos modos, es indudable que si se estudia previamente, por lo menos una vez en la forma general, bajo diferentes fuerzas, algunos sistemas hiperestáticos que, frecuentemente, entran en los sistemas dados, como, por ejemplo, los pórticos de la fig. 273, entonces, éstos podrán ser incluidos con éxito en el sistema básico para simplificar el cálculo.

Fig. 272

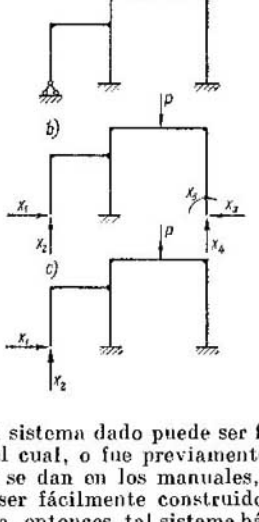
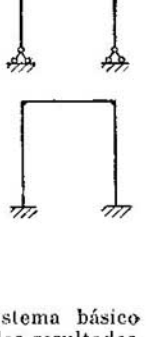


Fig. 273



Por eso, si del sistema dado puede ser formado tal sistema básico hiperestático, el cual, o fue previamente estudiado o los resultados de sus cálculos se dan en los manuales, por las indicaciones de los cuales pueden ser fácilmente construidos en él los diagramas unitarios y de carga, entonces, tal sistema básico es conveniente emplearlo, con el fin de simplificar el cálculo del sistema dado.

2. DIAGRAMAS UNITARIOS CONVENCIONALES

Fueron llamados unitarios los diagramas debidos a $X_k = 1$. Supongamos, ahora, que cada fuerza X_k se mide con otra unidad, especialmente elegida, igual a A_k, de las unidades anteriores corrientes. Todos los razonamientos expuestos anteriormente se conservan por completo. La forma de las ecuaciones canónicas (14.6) tampoco varía, pero, en ellas, los coeficientes adquieren otros valores. Ahora, los diagramas «unitarios» deben ser construidos por $X_k = A_k$ y las propias incógnitas básicas X_k representan fuerzas medidas con las nuevas unidades. A estos diagramas «unitarios» los llamaremos *convencionalmente unitarios*. De esta manera, al

construir los diagramas unitarios, no es obligatorio adoptar $X_k = 1$, sino que se puede tomar $X_k = A_k$, donde A_k es un número cualquiera. Las operaciones con tales diagramas convencionalmente unitarios son las mismas que con los unitarios. Todas las fórmulas para las fuerzas internas y sus diagramas (14.17), (14.18) se conservan por completo.

Esto lo confirmamos con una demostración analítica, para lo cual, multiplicamos los diagramas unitarios por los números arbitrarios $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

A la designación de los diagramas convencionalmente unitarios obtenidos la vamos a acompañar con una línea. A sus productos los designamos así:

$$\left.\begin{aligned} \delta'_{km} &= (\overline{M}'_k)\cdot(\overline{M}'_m) = (\overline{M}_k)\,A_k\cdot(\overline{M}_m)\,A_m = \delta_{km}A_kA_m; \\ \Delta_{kP} &= (M^0_P)\cdot(\overline{M}'_k) = (M^0_P)\cdot(\overline{M}_k)\,A_k = \Delta_{kP}A_k. \end{aligned}\right\} \quad (14.34)$$

Colocando (14.5) en la k-ésima ecuación canónica, obtenemos

$$\delta'_{k1}\frac{X_1}{A_kA_1} + \delta'_{k2}\frac{X_2}{A_kA_2} + \ldots + \delta'_{kn}\frac{X_n}{A_kA_n} + \frac{\Delta'_{kP}}{A_k} = 0.$$

Adoptando, en adelante, en calidad de incógnitas, a $Y_i = X_i/A_i$ y simplificando por $A_k \neq 0$, tendremos que,

$$\delta'_{k1}Y_1 + \delta'_{k2}Y_2 + \ldots + \delta'_{kn}Y_n + \Delta'_{kP} = 0. \quad (14.35)$$

Hemos obtenido una ecuación canónica del mismo tipo que la anterior cuyos coeficientes y miembros libres se determinan igual que en la ecuación canónica común, sólo que, ahora, con las incógnitas Y_k, menores que X_k en $A_1, A_2, \ldots, A_n$ veces, respectivamente. Los diagramas convencionalmente unitarios son tantas veces mayores que los unitarios. Esto significa que los productos $(M_k)\,X_k$ y $(M'_k)\,Y_k$, que dan los diagramas corregidos, son iguales entre sí.

Por eso es que el diagrama definitivo, también, puede ser compuesto por los diagramas convencionalmente unitarios, por la expresión (14.18). Por consiguiente, en el cálculo, se pueden utilizar tanto los diagramas unitarios como los convencionalmente unitarios. Al mismo tiempo no hay necesidad de conocer los propios números $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sino que es suficiente conocer una ordenada cualquiera del diagrama convencionalmente unitario.

Los diagramas convencionalmente unitarios son cómodos, por cuanto la ordenada, que determina el diagrama puede ser dada por cualquier número adecuado para el cálculo. Por ejemplo, en lugar del diagrama unitario (fig. 274, *a*), para el cual sería indispensable determinar la ordenada angular h sin α, se puede utilizar el diagrama convencionalmente unitario (fig. 274, *b*), con la ordenada igual a 6.

Por cuanto el empleo de los diagramas convencionalmente unitarios no se diferencia del de los unitarios, entonces, en adelante,

llamaremos unitarios a unos y otros. Del mismo modo, no haremos diferencia entre las incógnitas básicas X_k e Y_k y, a todas ellas, las designaremos, idénticamente, por X_k. A todos los coeficientes y miembros libres de las ecuaciones canónicas los designaremos por δ_{km} y Δ_{kP}, sin rasgos.

Si durante el cálculo, en las ecuaciones (14.21) y (14.24), se emplearon los diagramas convencionalmente unitarios, entonces,

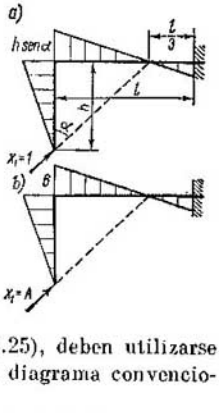


Fig. 274

para determinar Δ_{kl} y $\Delta_{k\Delta}$, por (14.22) y (14.25), deben utilizarse los valores $\overline{N}_k$, $\overline{M}_k$ y $\overline{R}_k$, correspondientes al diagrama convencionalmente unitario adoptado.

Ejemplo 30. Construir el diagrama de M en el pórtico de la fig. 275, *a*. En la fig. 275, *b*, *c*, *d* se exponen el sistema básico y los diagramas unitarios; en la 275, *e*, el diagrama de carga y en la 292, *f*, el unitario total. Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0, \qquad \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0.$$

Los coeficientes los calculamos multiplicando los diagramas. Tomamos en consideración sólo M:

$$\delta_{11}=(\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_1)=\frac{6\cdot8}{2}\cdot\frac{2}{3}\,6\,\frac{1}{2EJ}+\frac{6\cdot18}{2}\,\frac{2}{3}\,18\,\frac{1}{EJ}+12\cdot8\cdot12\,\frac{1}{2EJ}+$$
$$+\frac{12\cdot4}{2}\cdot\frac{2}{3}\,12\,\frac{1}{EJ}=\frac{1464}{EJ};$$

$$\delta_{12}=(\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_2)=-\frac{8\cdot18}{2}\,12\,\frac{1}{2EJ}+\frac{6\cdot8}{2}\cdot\frac{2}{3}\,18\,\frac{1}{2EJ}=-\frac{288}{EJ};$$

$$\delta_{22}=(\overline{M}_2)\cdot(\overline{M}_2)=\left(\frac{8\cdot18}{2}\cdot\frac{2}{3}\,18\,\frac{1}{2EJ}\right)2=\frac{864}{EJ}.$$

Efectuamos la verificación por líneas, multiplicando el diagrama de (M_S) por los de $(\overline{M}_1)$ y $(\overline{M}_2)$:

$$(\overline{M}_S)\cdot(\overline{M}_1)=\delta_{11}+\delta_{12}=\frac{6\cdot8}{2}\cdot\frac{2}{3}\,24\,\frac{1}{2EJ}+12\cdot8\,\frac{(12-6)}{2}\cdot\frac{1}{2EJ}+$$
$$+\frac{6\cdot18}{2}\cdot\frac{2}{3}\,18\,\frac{1}{EJ}+\frac{12\cdot4}{2}\cdot\frac{2}{3}\,12\,\frac{1}{EJ}=\frac{1176}{EJ};$$

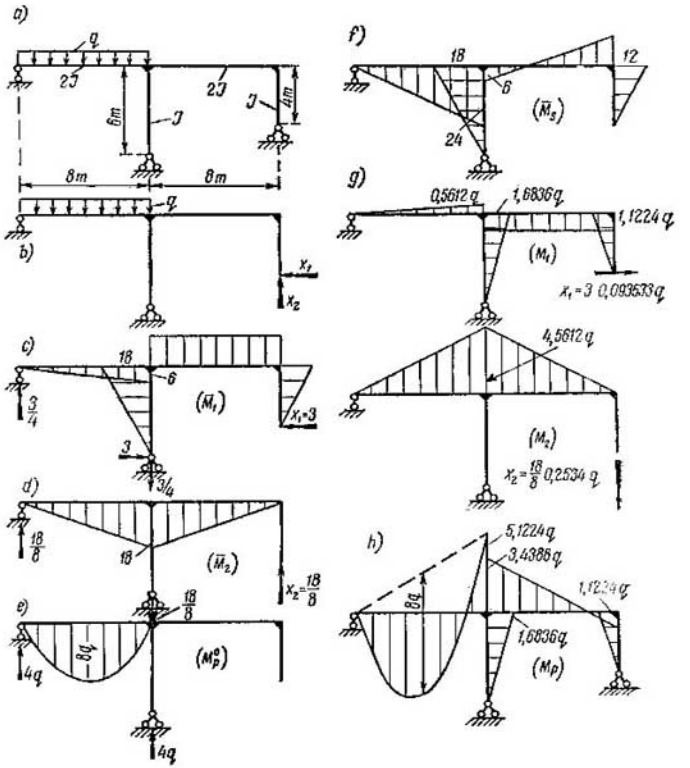


Fig. 275

$$(\bar{M}_S)\cdot(\bar{M}_2)=\delta_{21}+\delta_{22}=\frac{8\cdot 18}{2}\cdot\frac{2}{3}\,24\,\frac{1}{2EJ}+\frac{8\cdot 18}{2}\left(\frac{2}{3}\,6-\frac{1}{3}\,12\right)\frac{1}{2EJ}=\frac{576}{EJ}.$$

La verificación universal es:

$$(\bar{M}_S)\cdot(\bar{M}_S)=\delta_{11}+\delta_{22}+2\delta_{12}=\frac{8\cdot 24}{2}\cdot\frac{2}{3}\,24\,\frac{1}{2EJ}+$$

$$+\left[\frac{12\cdot 8\,(12-6)}{2}+\frac{18\cdot 8}{2}\left(\frac{2}{3}\,6-\frac{1}{3}\,12\right)\right]\frac{1}{2EJ}+\frac{6\cdot 18}{2}\cdot\frac{2}{3}\,18\,\frac{1}{EJ}+$$

$$+\frac{4\cdot 12}{2}\cdot\frac{2}{3}\,12\,\frac{1}{EJ}=\frac{1752}{EJ}.$$

Calculamos los términos de carga:

$$\Delta_{1P} = (M_P^0)\cdot(\overline{M}_1) = \frac{2}{3}\ 8\cdot 8q\cdot 3\ \frac{1}{2EJ} = \frac{64q}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = (M_P^0)\cdot(\overline{M}_2) = \frac{2}{3}\ 8\cdot 8q\cdot 9\ \frac{1}{2EJ} = \frac{192q}{EJ}.$$

Las ecuaciones canónicas con los coeficientes numéricos son:

$$1\,464X_1 - 288X_2 + 64q = 0;$$

$$-288X_1 + 864X_2 + 192q = 0.$$

De aquí obtenemos que: $X_1 = -0{,}09353q$ y $X_2 = -0{,}2534q$.

En la fig. 275,*g* se muestran los diagramas corregidos y, en la 275, *h*, el diagrama resultante.

Efectuamos la verificación multiplicando el diagrama resultante y el unitario total de (M_S):

$$(M_P)\cdot(\overline{M}_S) = \frac{1}{2EJ}\left(\frac{2}{3}\cdot 8\cdot 8q\cdot 12 - \frac{8\cdot 5{,}1224q}{2}\cdot\frac{2}{3}24\right) +$$

$$+\frac{1}{2EJ}\left[\frac{8\cdot 5{,}1224q}{2}\left(-\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{1}{3}12\right)+\frac{8\cdot 1{,}1224q}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot 6-\frac{2}{3}12\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1{,}6836q\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}18-\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1{,}1224q\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}12=\frac{92{,}083q}{EJ}-\frac{92{,}037q}{EJ}\approx 0.$$

El diagrama en la viga horizontal izquierda, durante la multiplicación, se consideraba compuesto, por abajo, por un segmento parabólico, cuya ordenada mayor era $\frac{qi^2}{8} = \frac{q\cdot 8^2}{8} = 8q$ y, por arriba, por un triángulo y, en la viga horizontal derecha, por dos triángulos, el de arriba con la ordenada $3{,}4388q$ y el de abajo con $1{,}1224q$.

3. INCORPORACION DE FUERZAS CUALESQUIERA A LA CARGA DADA, POR LA DIRECCION DE LAS INCOGNITAS BASICAS

Mostremos que durante el cálculo de sistemas hiperestáticos bajo carga, a esta última se le pueden incorporar fuerzas cualesquiera, por la dirección de las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$.

Supongamos que la incógnita básica se presenta como una suma de dos sumandos

$$X_i = X_i^0 + \Delta^X{}_i,$$

donde

X_i^0 es cualquier magnitud tomada arbitrariamente y ΔX_i, el complemento incógnito de ella.

En este caso, podemos escribir la ecuación canónica así:

$$\delta_{k1}(X_1^0 + \Delta x_1) + \delta_{k2}(X_2^0 + \Delta X_2) + \ldots + \delta_{kn}(X_n^0 + \Delta X_n) + \Delta_{kP} = 0.$$

La reducimos a la forma:

$$\delta_{k1}\Delta X_1 + \delta_{k2}\Delta X_2 + \ldots + \delta_{kn}\Delta X_n + \Delta_{kP}^* = 0, \qquad (14.36)$$

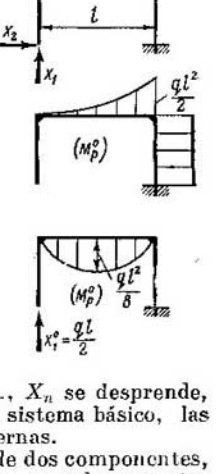
donde

$$\Delta_{kP}^* = \Delta_{kP} + \delta_{k1} + X_1^0 + \delta_{k2}X_2^0 + \ldots + \delta_{kn}X_n^0.$$

La magnitud Δ^*_{kP} es el desplazamiento por la dirección de la fuerza X_k, debido a la carga, y por la dirección de las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$, debido a las fuerzas dadas arbitrariamente.

Hablando en general, las fuerzas dadas $X_1^0, \ldots, X_n^0$, pueden ser arbitrarias, pero sus valores deben elegirse de tal modo que simplifiquen el cálculo. Si los valores de $X_1^0, \ldots, X_n^0$, se eligen cercanos a los valores esperados de $X_1, \ldots, X_n$, entonces, los incrementos $\Delta X_1, \Delta X_2, \ldots, \Delta X_n$, serán magnitudes pequeñas

Fig. 276



que pueden ser calculadas por las ecuaciones (14.36), con una exactitud menor de la que exigiría durante el cálculo de las incógnitas totales $X_1, \ldots, X_n$. En esto consiste una de las simplificaciones del cálculo.

Incluso, a veces, los diagramas de carga debidos a las cargas y a las fuerzas $X_1^0, \ldots, X_n^0$, que se le incorporaron, pueden ser más simples que los debidos solamente a la carga. Por ejemplo, en la fig. 276, el diagrama de carga, con la fuerza $X_1^0 = \frac{ql}{2}$ agregada a la carga, es más simple que sin ella.

La posibilidad de incorporar fuerzas a la carga por la dirección de las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$ se desprende, además, de los siguientes razonamientos. En el sistema básico, las fuerzas $X_1, \ldots X_k$ y la carga, son fuerzas externas.

A ellas siempre se las puede representar en forma de dos componentes, las $X_1^0, \ldots, X_n^0$, conocidas, y las incógnitas complementarias $\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n$. Las fuerzas conocidas $X_1^0, \ldots, X_n^0$, deben ser referidas a la carga.

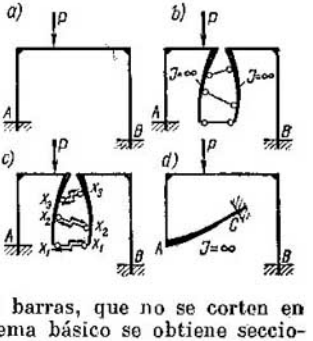
4. ELIMINACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS SECUNDARIOS

1) TRANSFORMACION DE UN SISTEMA INTRODUCIENDOLE CONSOLAS RIGIDAS

La idea de la transformación radica en sustituir el sistema dado por uno estáticamente equivalente, del cual, se forma, luego, el sistema básico. Esta sustitución se basa en la transformación del sistema con la introducción, en él, de consolas absolutamente rígidas.

Por ejemplo, en el pórtico de la fig. 277 se puede seccionar la viga horizontal, uniéndole luego, a cada parte, una barra rígida de cualquier forma, las cuales, a su vez, son unidas entre sí, de

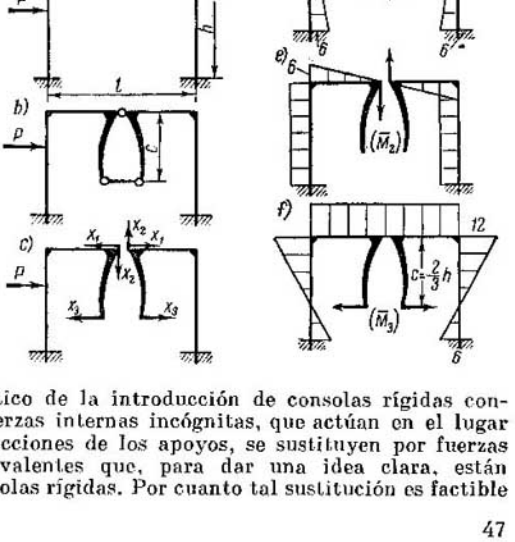
Fig. 277



modo invariante, aunque sea con tres barras, que no se corten en un mismo punto (fig. 277, *b*). El sistema básico se obtiene seccionando, a continuación, las tres barras que unen las consolas rígidas, (fig. 277, *c*).

También se puede proceder de otra manera, o sea: eliminar el apoyo izquierdo y unir al extremo izquierdo, una consola rígida, el extremo de la cual se empotra en cierto punto *C* (fig. 277, *d*).

Fig. 278



El sentido estático de la introducción de consolas rígidas consiste en que las fuerzas internas incógnitas, que actúan en el lugar del corte, o las reacciones de los apoyos, se sustituyen por fuerzas estáticamente equivalentes que, para dar una idea clara, están aplicadas a las consolas rígidas. Por cuanto tal sustitución es factible

en distintas variantes, entonces, es necesario emplear esta posibilidad para eliminar los desplazamientos secundarios, a fin de simplificar el cálculo.

Cómo hacer esto, se expone sobre el ejemplo de un pórtico en forma de U, con el que nos encontramos frecuentemente en la práctica (fig. 278, *a*). En la fig. 278, *b*, *c* se muestran los sistemas transformado y básico. En la fig. 278, *d*, *e*, *f* están representados los diagramas unitarios. De la condición de simetría tenemos que $\delta_{12} = \delta_{23} = 0$. Para reducir δ_{13} a cero, es necesario hacer $c = \frac{2}{3} h$. De este modo, en el sistema básico (fig. 278, *c*), todos los desplazamientos secundarios son iguales a cero y las ecuaciones canónicas toman la forma:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Una de las ordenadas de los diagramas unitarios puede ser elegida arbitrariamente, eligiendo independientemente de las dimensiones del pórtico, un número cómodo para el cálculo, lo cual se hizo en la fig. 278, *d*, *e*, *f*. El cálculo expuesto de tal pórtico es el más simple.

2) CENTRO ELASTICO

Corrientemente, la noción de centro elástico se aplica a los sistemas cerrados o con los dos extremos empotrados (fig. 279).

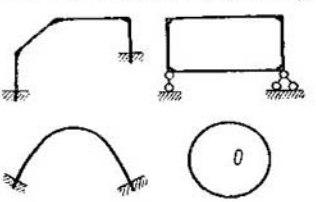


Fig. 279

Examinemos el último. En la fig. 280 se muestra el sistema transformado y el básico obtenido de él. En este sistema básico habrá tres desplazamientos secundarios δ_{12}, δ_{13} y δ_{23}. Al trasladar las incógnitas al punto *c*, disponemos de dos de sus coordenadas, con cuya correspondiente elección se pueden reducir a cero dos desplazamientos secundarios. Eligiendo la dirección de las fuerzas X_1 y X_2 aplicadas en el punto *c* podemos reducir a cero, también, el tercer desplazamiento secundario. Así pues, disponemos de tres condiciones, de las cuales haremos uso para reducir a cero los desplazamientos secundarios.

Mostremos como hacer esto. Escribimos la expresión de los momentos flectores unitarios en el sistema básico (fig. 280, *c*),

$$\overline{M}_1 = -1y; \qquad \overline{M}_2 = 1z; \qquad \overline{M}_3 = 1.$$

Al principio hacemos $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$.

Considerando que $\overline{N}_3 = \overline{Q}_3 = 0$, podemos escribir:

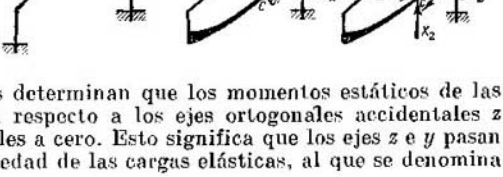
$$\delta_{13} = \sum \int \overline{M}_1 \frac{\overline{M}_3}{EJ} ds = \sum \int (-y) \cdot 1 \cdot dv = 0;$$

$$\delta_{23} = \sum \int \overline{M}_2 \frac{\overline{M}_3}{EJ} ds = \sum \int z \cdot 1 \cdot dv = 0,$$

donde, $dv = \frac{ds}{EJ}$ se llama carga elástica.

En el caso de flección, la carga elástica dv se puede examinar como el ángulo de giro recíproco de las secciones extremas del elemento ds que le corresponde a la unidad del momento flector.

Fig. 280



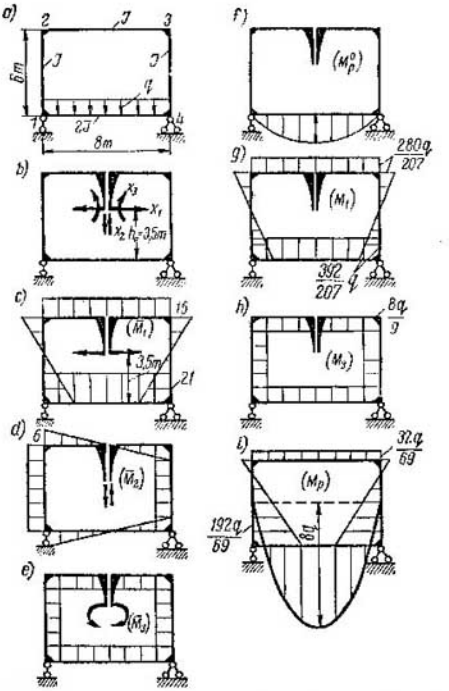
Estas condiciones determinan que los momentos estáticos de las cargas elásticas, con respecto a los ejes ortogonales accidentales z e y, deberán ser iguales a cero. Esto significa que los ejes z e y pasan por el centro de gravedad de las cargas elásticas, al que se denomina *centro elástico*.

Durante la deformación del sistema básico debida al momento $\overline{M}_3 = 1$, cuando $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$, el punto c del extremo de la consola rígida permanecerá en su sitio. Esto significa que, los desplazamientos δ_{13} y δ_{23} serán iguales a cero, independientemente de la dirección de las incógnitas X_1 y X_2. Por consiguiente, las ecuaciones canónicas, para las incógnitas X_1, X_2 y X_3, aplicadas en el centro elástico, independientemente de la dirección de X_1 y X_2, adoptan la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ &\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0; \\ &\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{aligned} \qquad (14.37)$$

La tercera ecuación canónica se hace independiente de X_1 y X_2. Ahora hacemos $\delta_{12} = 0$.

Fig. 281



Escribimos esta condición sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales transversales

$$\delta_{12} = \sum \int \overline{M}_1 \frac{\overline{M}_2}{EJ}\, ds = \sum \int -yz\, dv = 0.$$

De ella resulta que, si en la expresión $\delta_{12} = 0$ se desprecia la influencia de N y Q, entonces, el momento de inercia centrífugo de las cargas elásticas, con respecto a los ejes z e y, es igual a cero. Lo cual significa que z e y deberán ser los ejes de inercia principales de las cargas elásticas.

La posición del centro elástico y la dirección de los ejes principales se determinan por las fórmulas conocidas:

$$\xi_0 = \frac{\sum \int d\nu\xi}{\sum \int d\nu}; \quad \eta_0 = \frac{\sum \int d\nu\eta}{\sum \int d\nu}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{\xi\eta}}{J_\xi - J_\eta}, \qquad (14.38)$$

donde

ξ_0 y η_0 son las coordenadas del centro elástico en el sistema arbitrario de coordenadas rectangulares ξ y η;

α es el ángulo de giro de los ejes principales;
ξ y η son las coordenadas de las cargas elásticas;
J_ξ, J_η y $J_{\xi\eta}$ los momentos de inercia de las cargas elásticas con respecto a los ejes ξ y η.

Es necesario señalar que la determinación del centro elástico no presenta dificultades. Es mucho más difícil determinar las direcciones de los ejes principales de inercia. Frecuentemente, el resultado obtenido ($\delta_{12} = 0$) no compensa el tiempo empleado en su determinación. Por eso, señalando la posibilidad, en principio, de reducir a cero el desplazamiento secundario δ_{12}, si no poseemos algunas razones especiales, no es aconsejable emplear en el cálculo los ejes de inercia principales, sino, que debemos limitarnos al traslado de las fuerzas al centro elástico.

Indudablemente, es necesario utilizar la propiedad de los ejes principales de inercia en los sistemas simétricos, donde la posición de los ejes principales es conocida, por cuanto uno de ellos coincide con el eje de simetría. En este caso, teniendo en cuenta N y Q, el desplazamiento δ_{12} será igual a cero.

La eliminación del desplazamiento secundario δ_{12}, también es posible cambiando la dirección de una sola incógnita, pero no es menos complicado que por medio del giro de los ejes.

Ejemplo 31. Construir el diagrama de los momentos flectores (fig. 281). El centro elástico, por la condición de simetría, se halla sobre el eje de simetría. Los cálculos para la determinación de las cargas elásticas y del centro elástico con respecto a la viga horizontal inferior, se unificaron en la tabla 2.

Tabla 2

Designación de la barra	Resultante de las cargas elásticas	η en m	Momento estático de las cargas elásticas	Posición del centro elástico
1—4	$\frac{8}{2EJ} = \frac{4}{EJ}$	0	0	
2—3	$\frac{8}{EJ}$	6	$\frac{48}{EJ}$	
1—2	$\frac{6}{EJ}$	3	$\frac{18}{EJ}$	$\eta_0 = \frac{84}{24} = 3{,}5$ m
3—4	$\frac{6}{EJ}$	3	$\frac{18}{EJ}$	
Σ	$\frac{24}{EJ}$		$\frac{84}{EJ}$	

Por cuanto las cargas elásticas $dv = \frac{ds}{EJ}$, en una sección uniforme de la barra, están uniformemente repartidas por su longitud, entonces, su resultante

es igual a:

$$v = \frac{s}{EJ}.$$

En la fig. 281, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, están representados el sistema básico y los diagramas unitarios y de carga. Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$
$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0;$$
$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Sus coeficientes y miembros libres:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_1) = \frac{15\cdot 8\cdot 15}{EJ} + \frac{21\cdot 8\cdot 21}{E2J} +$$
$$+ \left(\frac{15\cdot 2{,}5}{2}\cdot\frac{2}{3}\,15 + \frac{21\cdot 3{,}5}{2}\cdot\frac{2}{3}\,21\right)\frac{2}{EJ} = \frac{4968}{EJ};$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2)\cdot(\overline{M}_2) = \left(\frac{\frac{6\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\,6}{EJ} + \frac{6\cdot 6\cdot 6}{EJ} + \frac{\frac{6\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\,6}{E2J}\right)_2 = \frac{288}{EJ};$$

$$\delta_{33} = (\overline{M}_3)\cdot(M_3) = \frac{1\cdot 8\cdot 1}{EJ} + \left(\frac{1\cdot 6\cdot 1}{EJ}\right)2 + \frac{1\cdot 8\cdot 1}{E2J} = \frac{24}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = (M^q_P)\cdot(\overline{M}_1) = -\frac{2}{3}\,8\cdot 8q\,\frac{21}{E2J} = -\frac{448q}{EJ}; \qquad \Delta_{2P} = (M^q_P)\cdot(\overline{M}_2) = 0;$$

$$\Delta_{3P} = (M^q_P)\cdot(\overline{M}_3) = -\frac{2}{3}\,8\cdot 8q\,\frac{1}{E2J} = -\frac{64q}{3EJ}.$$

Las ecuaciones canónicas con coeficientes numéricos son:

$$4968X_1 - 448q = 0; \quad 288X_2 + 0 = 0; \quad 24X_3 - \frac{64}{3}q = 0.$$

De éstas obtenemos. $X_1 = \frac{56q}{621}$; $X_2 = 0$ y $X_3 = \frac{8}{9}q$.

Los diagramas corregidos y el definitivo se exponen en la fig. 281, *g*, *h*, *i*. La verificación del diagrama se lleva a cabo, multiplicándolo por el diagrama de $(\overline{M}_3)$.

$$(M_P)\cdot(\overline{M}_3) = -\frac{32q\cdot 8\cdot 1}{69EJ} + \frac{(192q - 32q)}{69\cdot 2}\cdot\frac{6\cdot 1}{EJ}\,2 + \frac{192q\cdot 8\cdot 1}{69E2J} - \frac{2}{3}\,8\cdot 8q\,\frac{1}{E2J} = 0.$$

§ 130. VALORES INICIALES DE LOS MOMENTOS DE INERCIA Y LAS AREAS DE LAS SECCIONES. Para componer las ecuaciones canónicas en forma numérica es indispensable disponer de los valores iniciales de las características geométricas de las secciones transversales.

Antes que nada, pongamos en claro, qué es lo que se necesita conocer para efectuar el cálculo de la carga. Designamos al momento de inercia y al área de una sección cualquiera por J_0 y F_0. Supongamos que los momentos de inercia y las áreas de las secciones restantes están dados con los respectivos coeficientes correctores k_i y m_i en la forma siguiente: $J_i = k_i J_0$ y $F_i = m_i F_0$.

Al considerar las deformaciones debidas a los momentos flectores y las fuerzas longitudinales transversales, los coeficientes de las ecuaciones canónicas δ_{km} y los miembros libres Δ_{kP} pueden ser presentados así:

$$\delta_{km} = \frac{1}{EJ_0}\left(a_{km} + b_{km}\frac{J_0}{F_0} + c_{km}\frac{EJ_0}{GF_0}\right); \qquad (a)$$

$$\Delta_{kP} = \frac{1}{EJ_0}\left(A_{kP} + B_{kP}\frac{J_0}{F_0} + C_{kP}\frac{EJ_0}{GF_0}\right),$$

donde a_{km}, b_{km}, c_{km}, A_{kP}, B_{kP}, y C_{kP} son números independientes de las dimensiones de las secciones; a_{km} y A_{kP} sólo dependen de los coeficientes k_i; b_{km} y B_{kP}, de m_i; c_{km} y C_{kP}, de μ_i y m_i.

Colocando estas expresiones en la k-ésima ecuación canónica (14.5), obtenemos

$$\frac{1}{EJ_0}\left(a_{k1} + b_{k1}\frac{J_0}{F_0} + c_{k1}\frac{EJ_0}{GF_0}\right)X_1 +$$
$$+ \frac{1}{EJ_0}\left(a_{k2} + b_{k2}\frac{J_0}{F_0} + c_{k2}\frac{EJ_0}{GF_0}\right)X_2 +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{EJ_0}\left(a_{kn} + b_{kn}\frac{J_0}{F_0} + c_{kn}\frac{EJ_0}{GF_0}\right)X_n +$$
$$+ \frac{1}{EJ_0}\left(A_{kP} + B_{kP}\frac{J_0}{F_0} + C_{kP}\frac{EJ_0}{GF_0}\right) = 0. \qquad (b)$$

La magnitud EJ_0, en la ecuación canónica, puede ser simplificada. Por consiguiente, durante el cálculo, no es obligatorio conocer esta magnitud. Sólo es indispensable conocer los coeficientes k_i, m_i y μ_i y la relación $\frac{J_0}{F_0}$.

Si el cálculo se efectúa teniendo en cuenta sólo las deformaciones debidas al momento flector, entonces, es necesario conocer solamente los coeficientes k_i.

De la ecuación canónica (b) se ve que el cálculo no varía *solamente cuando* J_0 y F_0 *varían proporcionalmente*. Si el cálculo se lleva a cabo teniendo en cuenta sólo las deformaciones debidas al momento flector, entonces, cualesquiera que sean las variaciones de J_0 y F_0, no modificarán sus resultados.

Si el cálculo se efectúa a la acción de la temperatura o a la dislocación de los apoyos, entonces, ya no es posible simplificar la magnitud EJ_0 en las ecuaciones canónicas (b) dado que los miembros libres Δ_{kt} y $\Delta_{k\Delta}$ no la contienen. Por eso aquí, además de las magnitudes imprescindibles para el cálculo de la carga, es necesario conocer aún el valor numérico de EJ_0. En este caso, se ve fácilmente que, con el aumento de EJ_0, también aumentarán las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$.

§ 131. PRINCIPIO DEL TRABAJO MINIMO. Representémonos una viga de varios tramos sobre apoyos elásticos (fig. 282, *a*). Para los razonamientos, empleamos un sistema básico en forma de una

viga sobre los dos apoyos extremos, para lo cual, seccionamos los apoyos elásticos del sistema dado (fig. 282, *b*). Componemos la expresión de la energía potencial U de la deformación del sistema. Ella es función de la carga P y las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$, esto es,

$$U = f(X_1, X_2, \ldots, X_n, P).$$

Componemos las derivadas parciales de la energía potencial de la deformación del sistema con relación a las incógnitas básicas:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial X_n}.$$

Según el teorema de Castellano, estas derivadas parciales son iguales a los desplazamientos por la dirección de las fuerzas $X_1, \ldots, X_n$ y, por consiguiente, en el sistema dado son iguales a cero:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0. \tag{14.39}$$

Desarrollando estas ecuaciones, llegamos a la forma conocida de las ecuaciones canónicas.

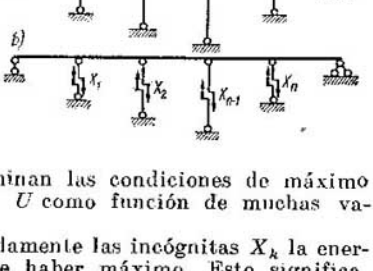


Fig. 282

Las ecuaciones (14.49) determinan las condiciones de máximo o mínimo de la energía potencial U como función de muchas variables $X_1, \ldots, X_n$.

Dado que al aumentar ilimitadamente las incógnitas X_k la energía potencial aumenta, no puede haber máximo. Esto significa, que las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$ adquieren tales valores, para los cuales la energía potencial de la deformación del sistema es mínima. Por cuanto la energía potencial de la deformación es igual al trabajo de las fuerzas externas, entonces, estas últimas, deformando al sistema, también realizan un trabajo mínimo. En esto precisamente reside el principio del trabajo mínimo.

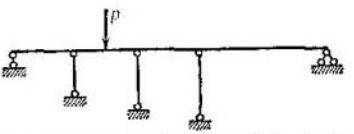
La condición de mínimo de la energía potencial de la deformación también se puede establecer matemáticamente. Compongamos las segundas derivadas parciales de la energía potencial de deformación con relación a las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_k^2} = \frac{\partial \Delta_k}{\partial X_k} = \delta_{kk} > 0, \tag{14.40}$$

Esta es, precisamente, la condición de mínimo de la función.

Proseguimos con nuestros razonamientos. De la ecuación (14.40) obtenemos el valor de las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$. Supongamos que todas ellas son diferentes de cero. Si hacemos, ahora, $X_n = 0$, entonces, descubrimos que las condiciones (14.39) no serán cumplidas y que no hay un mínimo de energía potencial. Si $X_n = 0$, el nuevo valor de la energía potencial será mayor que el anterior.

Fig. 283



Examinemos ahora el nuevo sistema sin el vínculo n (fig. 283), con la energía potencial de deformación $U_1 = f_1(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, P)$.

Las nuevas condiciones para el mínimo son:

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial U_1}{\partial X_{n-1}} = 0.$$

De estas condiciones hallaremos los nuevos valores de $X_1, \ldots, X_{n-1}$ que determinan el mínimo de la energía potencial $U_{1,\text{mín}}$ para el sistema con $(n-1)$ incógnitas. Si a este sistema le agregamos la fuerza $X_n = 0$, entonces, la magnitud de la energía potencial U_1 no varía. Pero anteriormente, para el sistema con n incógnitas fue hallado que, cuando $X_n = 0$, la magnitud de la energía potencial, siendo las fuerzas restantes $X_1, \ldots, X_{n-1}$ diferentes de cero, es mayor que $U_{\text{mín}}$.

Esto significa que, en el sistema con un vínculo excluido, la energía potencial tiene su mínimo, pero él es mayor que el mínimo de la energía potencial del sistema con un número completo de vínculos, es decir,

$$U_{1,\text{mín}} > U_{\text{mín}}. \qquad (14.41)$$

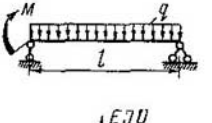
Sólo en el caso particular, cuando en el sistema con el número completo de vínculos resulta, circunstancialmente, que $X_n = 0$, estos valores de la energía potencial serán iguales.

Por consiguiente, al eliminar un vínculo, las fuerzas externas realizarán mayor trabajo que antes, o sea, el sistema se hace menos rígido. Esto significa que la *introducción de vínculos eleva la rigidez del sistema y, la eliminación*, si el vínculo trabaja, *la disminuye*, pero, si no trabaja, no la varía.

Esta conclusión corresponde a la tesis establecida anteriormente de que cualquier vínculo que trabaja, dificultando los desplazamientos por su dirección, disminuye los desplazamientos del sistema, esto es, eleva su rigidez.

Para concluir, examinemos la gráfica de la variación de la energía potencial de deformación de la viga en función de la variación

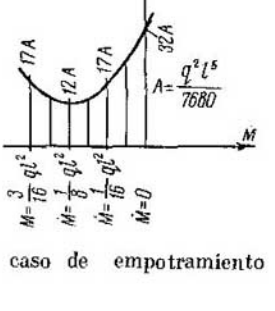
Fig. 284



del momento $\dot{M}$ (fig. 284). El mínimo de la energía potencial será cuando $\dot{M} = -\frac{ql^2}{8}$. Esto se desprende de la ecuación

$$U = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q^2 l^5}{240} + \frac{\dot{M} q l^3}{24} + \frac{\dot{M}^2 l}{6}\right),$$

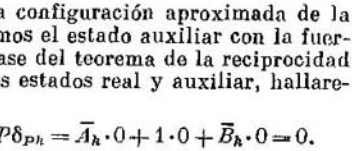
de donde $\frac{\partial U}{\partial \dot{M}} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{ql^3}{24} + \frac{2\dot{M}l}{6}\right) = 0.$



El valor de $\dot{M} = -\frac{ql^2}{8}$ corresponde al caso de empotramiento del extremo de la viga.

§ 132. DEDUCCION DE LAS ECUACIONES CANONICAS POR EL TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD DE LOS TRABAJOS. Al sistema básico con la carga y las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$, aplicadas a él (fig. 285, *a*), lo llamaremos estado real. Sobre la

Fig. 285



figura, con punteado se muestra la configuración aproximada de la línea elástica de la viga. Examinemos el estado auxiliar con la fuerza $X_k = 1$ (fig. 285, *b*). Sobre la base del teorema de la reciprocidad de los trabajos de las fuerzas de los estados real y auxiliar, hallaremos que

$$X_1\delta_{1k} + X_2\delta_{2k} + \ldots + X_n\delta_{nk} + P\delta_{Pk} = \bar{A}_k \cdot 0 + 1 \cdot 0 + \bar{B}_k \cdot 0 = 0.$$

Hemos obtenido la ecuación canónica del teorema de los trabajos recíprocos. Considerando que la fuerza $X_k = 1$ tiene dimensión física, cada uno de sus sumandos es un trabajo de la fuerza real en el

desplazamiento del estado auxiliar. Esta forma de escribir las ecuaciones canónicas no tiene ventajas particulares. Es cómoda solamente durante el cálculo de los sistemas a la dislocación de los apoyos.

§ 133. PROCEDIMIENTOS ESPECIALES DE RESOLUCION DE LAS ECUACIONES CANONICAS. La resolución de las ecuaciones canónicas por medio de máquinas computadoras aritméticas electrónicas (ETzVN) no presenta ninguna dificultad. En la actualidad, se han elaborado programas estandart especiales para la resolución de ecuaciones con muchas incógnitas. Pero, en los cálculos a mano o con el empleo de lo que se denomina «poca mecanización», en forma de máquinas de mesa con teclas, la resolución de las ecuaciones canónicas, con tres o más incógnitas, representa una parte muy trabajosa del cálculo. Por eso es importante conocer los procedimientos de resolución que, conduciendo al objetivo por las vías más cortas, excluyerán la aparición de errores y su acumulación.

Estos mismos métodos son también aplicables con las ETzVM.

1. FORMA GENERAL DE RESOLUCION DE ECUACIONES POR MEDIO DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA

Escribimos las ecuaciones canónicas.

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\ldots+\delta_{1k}X_k+\ldots\\
&\quad\ldots+\delta_{1m}X_m+\ldots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0;\\
&\delta_{k1}X_1+\delta_{k2}X_2+\ldots+\delta_{kk}X_k+\ldots\\
&\quad\ldots+\delta_{km}X_m+\ldots+\delta_{kn}X_n+\Delta_{kP}=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\ldots+\delta_{nk}X_k+\ldots\\
&\quad\ldots+\delta_{nm}X_m+\ldots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.42)$$

Presentamos la resolución de las ecuaciones canónicas en la forma:

$$\left.\begin{aligned}
&X_1=\beta_{11}\Delta_{1P}+\beta_{12}\Delta_{2P}+\ldots+\beta_{1i}\Delta_{iP}+\ldots\\
&\quad\ldots+\beta_{1k}\Delta_{kP}+\ldots+\beta_{1n}\Delta_{nP};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_i=\beta_{i1}\Delta_{1P}+\beta_{i2}\Delta_{2P}+\ldots+\beta_{ii}\Delta_{iP}+\ldots\\
&\quad\ldots+\beta_{ik}\Delta_{kP}+\ldots+\beta_{in}\Delta_{nP};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_k=\beta_{k1}\Delta_{1P}+\beta_{k2}\Delta_{2P}+\ldots+\beta_{ki}\Delta_{iP}+\ldots\\
&\quad\ldots+\beta_{kk}\Delta_{kP}+\ldots+\beta_{kn}\Delta_{nP};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_n=\beta_{n1}\Delta_{1P}+\beta_{n2}\Delta_{2P}+\ldots+\beta_{ni}\Delta_{iP}+\ldots\\
&\quad\ldots+\beta_{nk}\Delta_{kP}+\ldots+\beta_{nn}\Delta_{nP}.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.43)$$

Los coeficientes de la clase β_{ik} llevan el nombre de coeficientes o números de influencia del miembro libre $\Delta_{kP}=1$ sobre el valor de la incógnita X_i.

Escribimos (14.13) en la forma matriz de la siguiente manera:

$$X = BD_P$$

donde $$B = \| \beta_{ik} \| = \begin{Vmatrix} \beta_{11}\beta_{12} \ldots \beta_{1k} \ldots \beta_{1n} \\ \beta_{21}\beta_{22} \ldots \beta_{2k} \ldots \beta_{2n} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \beta_{n1}\beta_{n2} \ldots \beta_{nk} \ldots \beta_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (14.44)$$

es la matriz de los coeficientes de influencia.

Mostremos que los coeficientes de influencia β_{ik} pueden considerarse como reacciones de los vínculos i, debidas a los desplazamientos unitarios de los vínculos k, en el sistema dado. Para ello, al sistema dado le imprimimos un desplazamiento igual a la unidad, por la dirección del vínculo k (por la dirección de la fuerza X_k) y hallamos todas las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$. A estas incógnitas las tomamos en calidad de carga sobre el sistema básico. Evidentemente, que para esta carga sólo $\Delta_{kP}=1$ y, todas las restantes $\Delta_{iP}=0$. Entonces, de (14.43) obtenemos que $X_i = \beta_{ik}$.

La dimensión de los coeficientes β_{ik} se desprende de su determinación como fuerzas correspondientes a la unidad de los desplazamientos, es decir,

$$\text{dimensión de } \beta_{ik} = \frac{\text{dimensión de la reacción del vínculo } i}{\text{dimensión del desplazamiento del vínculo } k}$$

Los coeficientes de influencia poseen la propiedad de reciprocidad $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, lo cual ya es conocido del teorema de la reciprocidad de las reacciones unitarias.

Demostremos que la matriz de los coeficientes de influencia $\|\beta\|_{ik}$ representa **la matriz inversa** de los coeficientes de las ecuaciones canónicas $\|\delta\|_{ik}$, **con signo contrario.**

Para esto colocamos la expresión (14.44) en la (14.6)

$$DBD_P + D_P = 0.$$

Después de las simplificaciones

$$DB = -E. \qquad (14.45)$$

Por cuanto $DD^{-1} = E$, obtenemos que

$$B = -D^{-1}. \qquad (14.46)$$

Por consiguiente, la determinación de la matriz de los coeficientes de influencia, de hecho, es una transformación de la matriz de los coeficientes de las ecuaciones canónicas. Esto significa que los coeficientes de influencia dependen solamente de los coeficientes de las ecuaciones canónicas y no de sus miembros libres.

Sobre la base de la expresión (14.46) podemos escribir la regla de la verificación de los coeficientes de influencia.

El producto de la línea de la matriz $\|\delta_{ik}\|$ por la columna (o línea) del mismo nombre de la matriz $\| \delta_{ik} \|$ es igual a la unidad negativa y, su producto por cualquier columna (o línea) de nombre distinto, es igual a cero. Así, por ejemplo, multiplicando la matriz $\| \delta_{ik} \|$ por la k-ésima columna de la matriz $\| \beta_{ik} \|$, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}\beta_{1k} + \delta_{12}\beta_{2k} + \ldots + \delta_{1k}\beta_{kk} + \ldots + \delta_{1n}\beta_{nk} + 0 = 0;\\
&\delta_{21}\beta_{1k} + \delta_{22}\beta_{2k} + \ldots + \delta_{2k}\beta_{kk} + \ldots + \delta_{2n}\beta_{nk} + 0 = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{k1}\beta_{1k} + \delta_{k2}\beta_{2k} + \ldots + \delta_{kk}\beta_{kk} + \ldots + \delta_{kn}\beta_{nk} + 1 = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1}\beta_{1k} + \delta_{n2}\beta_{2k} + \ldots + \delta_{nk}\beta_{kk} + \ldots + \delta_{nn}\beta_{nk} + 0 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (14.47)$$

La presentación de las incógnitas, en la forma general, por medio de los coeficientes de influencia y miembros libres, es particularmente cómoda cuando el cálculo de un sistema hiperestático se lleva a cabo para varias cargas alternadas, lo que usualmente tiene lugar en la práctica, o bien para una carga rodante, al construir las líneas de influencia. Si los coeficientes de influencia fueron determinados, entonces, para cada nueva carga, el cálculo se reduce a la determinación de Δ_{kP} debido a esta carga y al cálculo de las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$.

Los coeficientes β_{ik} se determinan con distintos procedimientos, los que también se emplean para la resolución directa de las ecuaciones canónicas.

2. RESOLUCION DE LAS ECUACIONES CANONICAS Y CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA CON AYUDA DE DETERMINANTES

Cualquier incógnita se determina por la fórmula

$$X_i = D_i : D, \quad (14.48)$$

donde

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}\delta_{12} & \ldots & \delta_{1i} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22} & \ldots & \delta_{2i} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{k1}\delta_{k2} & \ldots & \delta_{ki} & \ldots & \delta_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1}\delta_{n2} & \ldots & \delta_{ni} & \ldots & \delta_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_i = -\begin{vmatrix} \delta_{11}\delta_{12} & \ldots & \delta_{1P} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22} & \ldots & \Delta_{2P} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{k1}\delta_{k2} & \ldots & \Delta_{kP} & \ldots & \delta_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1}\delta_{n2} & \ldots & \Delta_{nP} & \ldots & \delta_{nn} \end{vmatrix}.$$

columna i

Se puede demostrar que el determinante D es siempre mayor que cero.

La fórmula para β_{ik} se obtiene de la expresión (14.48), haciendo en ella $\Delta_{kp} = 1$, todos los restantes $\Delta_{ip} = 0$.

$$X_i = \beta_{ik} = -\begin{vmatrix} \delta_{11}\delta_{12} & \dots & 0 & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22} & \dots & 0 & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1}\delta_{k2} & \dots & 1 & \dots & \delta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1}\delta_{n2} & \dots & 0 & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} : D = (-1)^{(i+k\pm 11)} \frac{D_{ik}}{D}. \quad (14.49)$$

El determinante D_{ik} se obtiene del determinante básico D, excluyendo la i-ésima línea y la k-ésima columna o la k-ésima línea y la i-ésima columna.

El procedimiento de los determinantes posee los siguientes defectos:

1) los determinantes se calculan de manera simple sólo hasta el tercer orden, esto es, cuando el número de incógnitas no es mayor de tres;

2) el resultado en el numerador y denominador de (14.48) y (14.49) se obtiene, frecuentemente, como la diferencia de números grandes próximos, lo cual requiere cálculos exactos, de lo contrario, en el resultado habrá un error grande.

El procedimiento merece atención cuando el número de incógnitas es pequeño.

Ejemplo 32. Resolver un sistema de ecuaciones canónicas por medio de los determinantes:

$$\begin{aligned} 4X_1 - 2X_2 + 2X_3 - 6 &= 0; \\ -2X_1 + 6X_2 + 2X_3 - 16 &= 0; \\ 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Los determinantes son:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 24; \qquad D_1 = -\begin{vmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -16 & 6 & 2 \\ -18 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 24;$$

$$D_2 = -\begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -2 & -16 & 2 \\ 2 & -18 & 4 \end{vmatrix} = 48; \qquad D_3 = -\begin{vmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -16 \\ 2 & 2 & -18 \end{vmatrix} = 72.$$

Las incógnitas son:

$$X_1 = \frac{24}{24} = 1; \quad X_2 = \frac{48}{24} = 2; \quad X_3 = \frac{72}{24} = 3.$$

Por la fórmula (14.49), para $D = 24$, los coeficientes de influencia son:

$$\beta_{11} = (-1)^{(1+1+1)} \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{24} = -\frac{5}{6}; \qquad \beta_{12} = (-1)^{(1+2+1)} \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{24} = -\frac{1}{2};$$

$$\beta_{13} = (-1)^{(1+3+1)} \frac{\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \frac{2}{3}; \qquad \beta_{22} = (-1)^{(2+2+1)} \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{24} = -\frac{1}{2};$$

$$\beta_{23} = (-1)^{(2+3+1)} \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \frac{1}{2}; \qquad \beta_{33} = (-1)^{(3+3+1)} \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{24} = -\frac{5}{6}.$$

La verificación de los coeficientes obtenidos se efectúa por la fórmula (14.47) para $k=1, 2, 3$, empleando la línea subrayada:

$$4\left(-\frac{5}{6}\right)+(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{2}{3}+1=0;$$

$$-2\left(-\frac{1}{2}\right)+6\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{1}{2}+1=0;$$

$$2\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+4\left(-\frac{5}{6}\right)+1=0.$$

3. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES Y CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA, POR EL PROCEDIMIENTO DE GAUSS

El procedimiento de Gauss es el método de la exclusión sucesiva de las incógnitas en un orden determinado, lo que permite cumplir la verificación de control durante el proceso de resolución.

Al principio, de la primera ecuación del sistema dado X_1 se expresa por medio de todas las demás incógnitas $X_2, \ldots, X_n$ y se coloca en las ecuaciones restantes. Luego, de la primera ecuación del nuevo sistema, X_2 se expresa por medio de las restantes incógnitas y se coloca en las ecuaciones que quedan. Y así sucesivamente.

Después, de cada grupo de ecuaciones obtenidas, se examinan sólo las primeras ecuaciones, lo que conduce a un sistema de ecuaciones con una matriz triangular de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\ldots+\delta_{1k}X_k+\ldots\\
&\qquad\ldots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0;\ (1)\\
&\delta^{(1)}_{22}X_2+\delta^{(1)}_{23}X_3+\ldots+\delta^{(1)}_{2k}X_k\ldots+\delta^{(1)}_{2n}X_n+\\
&\qquad+\Delta^{(1)}_{2P}=0;\ (2^{(1)})\\
&\delta^{(2)}_{33}X_3+\ldots+\delta^{(2)}_{3k}X_k+\ldots+\delta^{(2)}_{3n}X_n+\Delta^{(2)}_{3P}=0;\ (3^{(2)})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta^{(i-1)}_{ii}X_i+\delta^{(i-1)}_{ik}X_k+\ldots+\delta^{(i-1)}_{in}X_n+\Delta^{(i-1)}_{iP}=0;\ (i^{(i-1)})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\delta^{(n-1)}_{nn}X_n+\Delta^{(n-1)}_{nP}=0.\ (n^{(n-1)})
\end{aligned}\right\}\quad(14.50)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones se efectúa en orden inverso, desde abajo hacia arriba:

$$\left.\begin{aligned}
&X_n=-\frac{\Delta^{(n-1)}_{nP}}{\delta^{(n-1)}_{nn}};\\
&X_{n-1}=\alpha_{(n-1)n}X_n-\frac{\Delta^{(n-2)}_{(n-1)P}}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(14.51)$$

$$X_i = \alpha_{i(i+1)}X_{i+1} + \ldots + \alpha_{in}X_n - \frac{\Delta_{iP}^{(i-1)}}{\delta_{ii}^{(i-1)}};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1 = \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + \alpha_{14}X_4 + \ldots + \alpha_{1n}X_n - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}, \qquad (14.51)$$

donde $a_{km} = -\delta_{km}^{(k-1)} : \delta_{kk}^{(k-1)}$,
siendo $m = (k+1), (k+2), \ldots, n$.

La obtención de las ecuaciones con matriz triangular de los coeficientes se llama ciclo directo y, a la resolución de estas ecuaciones, ciclo inverso.

Las ecuaciones (14.50) pueden ser obtenidas, así como las ecuaciones canónicas, para diferentes sistemas básicos.

Examinemos un sistema hiperestático y el sistema básico, para éste (fig. 286, *a*). Compongamos para él la primera ecuación canónica del tipo de la ecuación (1) en (14.50).

Ahora, introducimos un vínculo por la dirección de X_1 y tomamos el sistema monohiperestático obtenido como básico (fig. 286, *b*). Escribimos, para él, la primera ecuación canónica que comenzará con X_2 y, en (14.50), será la ecuación $(2^{(1)})$. Ahora queda en claro el sentido del índice superior en las expresiones (14.50) y (14.51), que señala el grado de indeterminación estática del sistema básico.

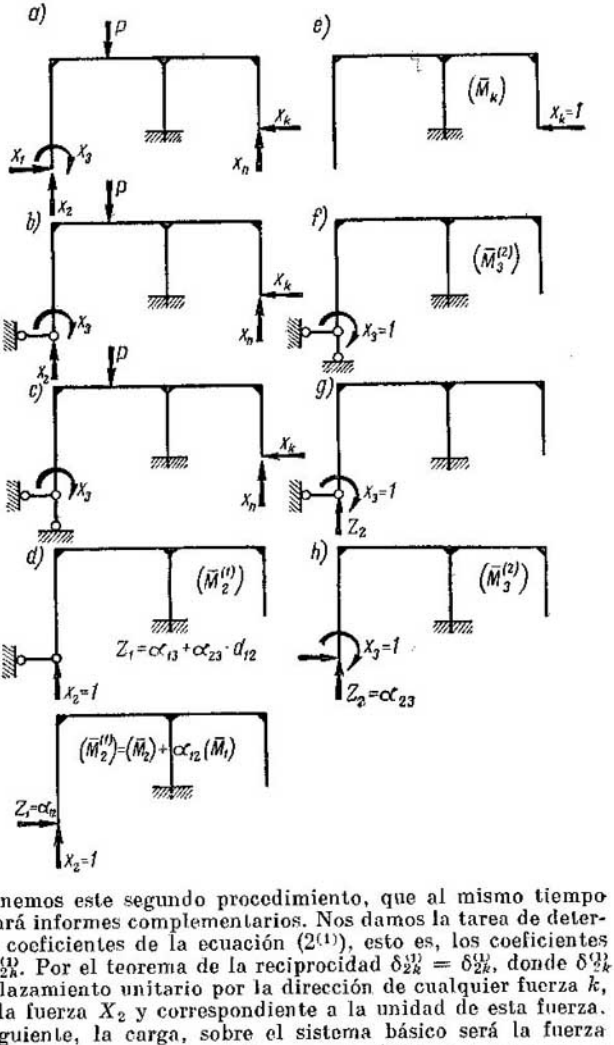
De este modo se revela el sentido mecánico de los coeficientes $\delta_{2k}^{(1)}$ como desplazamientos unitarios por la dirección de la fuerza X_2, debidos a las demás incógnitas X_k en el sistema monohiperestático.

Una vez escrita la ecuación $(2^{(1)})$, introducimos otro vínculo más en el sistema básico, por la dirección de la fuerza X_2 (fig. 286, *c*) y escribimos, nuevamente, sólo la primera ecuación, lo que nos dará la tercera ecuación $(3^{(2)})$ en (14.50). El índice superior en el número de la ecuación y en sus coeficientes, muestra que esta ecuación se refiere a un sistema básico de doble indeterminación estática. Sus coeficientes $\delta_{3k}^{(2)}$ son los desplazamientos unitarios por la dirección de la fuerza X_3, debidos a las restantes incógnitas X_k en este sistema básico, etc.

El último sistema básico es un sistema $(n-1)$ veces hiperestático obtenido con la introducción sucesiva de vínculos. Generalizando, se puede decir que el índice $(i-1)$, en el signo $i^{(i-1)}$ de la ecuación (14.50), señala el grado de indeterminación estática del sistema básico y, los coeficientes $\delta_{ih}^{(i-1)}$, de la ecuación $i^{(i-1)}$, son los desplazamientos unitarios por la dirección de la fuerza X_i, debidos a las demás fuerzas X_h en este sistema básico $(i-1)$ veces estáticamente indeterminado.

Por cuanto las ecuaciones (14.50) pueden ser interpretadas como ecuaciones canónicas para los diferentes sistemas básicos empleados simultáneamente, entonces, sus coeficientes pueden ser obtenidos no sólo por vía aritmética sino, también, sobre la base de la teoría de los desplazamientos.

Fig. 286



Examinemos este segundo procedimiento, que al mismo tiempo nos brindará informes complementarios. Nos damos la tarea de determinar los coeficientes de la ecuación $(2^{(1)})$, esto es, los coeficientes del tipo $\delta_{2k}^{(1)}$. Por el teorema de la reciprocidad $\delta_{2k}^{(1)} = \delta_{k2}^{(1)}$, donde $\delta_{k2}^{(1)}$ es el desplazamiento unitario por la dirección de cualquier fuerza k, debido a la fuerza X_2 y correspondiente a la unidad de esta fuerza. Por consiguiente, la carga, sobre el sistema básico será la fuerza $X_2 = 1$ (fig. 286, *d*) que da el diagrama de $\bar{M}_2^{(1)}$. Este sistema es

monohiperestático. Adoptamos para él, en calidad de básico, el sistema isostático inicial (fig. 286, *d*). La ecuación canónica será

$$\delta_{11}Z_1 + \delta_{12} = 0, \text{ de donde } Z_1 = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \alpha_{12}.$$

Por consiguiente, α_{12} es la reacción del vínculo introducido en el sistema monohiperestático básico debida a $X_2 = 1$.

Una interpretación análoga como reacciones debidas a las fuerzas $X_k = 1$, reciben, también, los restantes coeficientes del tipo α_{1k}. Después de esto, podemos decir, que el diagrama de $\overline{M}_2^{(1)}$ estará compuesto de dos diagramas

$$(\overline{M}_2^{(1)}) = (\overline{M}_2) + \alpha_{12} \cdot \overline{M}_1). \qquad (14.52)$$

Para la determinación del desplazamiento $\delta_{k2}^{(1)}$, al sistema isostático básico se le aplica la fuerza auxiliar $X_k = 1$ (fig. 286, *e*), lo que determina al diagrama de $\overline{M}_k$. Ahora hallamos $\delta_{k2}^{(1)}$

$$\delta_{k2}^{(1)} = \delta_{2k}^{(1)} = (\overline{M}_k) \cdot [(\overline{M}_2) + \alpha_{12} \cdot (\overline{M}_1)] = \delta_{2k} + a_{12}\delta_{1k}. \qquad (a)$$

La expresión obtenida muestra que la ecuación $(2^{(1)})$ puede ser obtenida por la fórmula simbólica siguiente:

$$2^{(1)} = 2 + \alpha_{12} \cdot 1. \qquad (14.53)$$

De esta expresión se ve que los coeficientes de la ecuación $(2^{(1)})$, pueden ser obtenidos eliminando la incógnita X_1 de las dos primeras ecuaciones de (14.42).

Pasamos a la determinación de los coeficientes $\delta_{3k}^{(2)} = \delta_{k3}^{(2)}$. Como carga sobre el sistema básico para $\delta_{k3}^{(2)}$ participará la fuerza $X_3 = 1$ (fig. 286, *f*). Con esta fuerza obtenemos el diagrama de $(\overline{M}_3^{(2)})$. Efectuamos la resolución del sistema de doble indeterminación estática en forma sucesiva. Al principio, empleamos el sistema básico sin el vínculo por la dirección de X_2 (fig. 286, *g*). La ecuación canónica es

$$\delta_{22}^{(1)}Z_2 + \delta_{23}^{(1)} = 0, \text{ de donde } Z_2 = -\frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} = \alpha_{23}.$$

En base a esto, cualquier coeficiente del tipo α_{2k} es la reacción del vínculo 2 debida a la fuerza $X_k = 1$ en un sistema básico monohiperestático.

Al obtener la fuerza Z_2, a la que ahora consideraremos como carga, pasamos al sistema básico isostático (fig. 286, *h*):

$$\delta_{11}Z_1 + \delta_{13} + \alpha_{23}\delta_{12} = 0, \text{ de donde } Z_1 = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} - \alpha_{23}\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{12}.$$

Esto significa que $(\overline{M}_3^{(2)})$ estará compuesto de los siguientes diagramas:

$$(\overline{M}_3^{(2)}) = (\overline{M}_3) + (\alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{12})(\overline{M}_1) + \alpha_{23}(\overline{M}_2). \qquad (14.54)$$

Para la determinación de $\delta_{3k}^{(2)}$, aplicando la fuerza $X_k = 1$ al sistema isostático, formamos un estado auxiliar, (fig. 286, *e*). El desplazamiento $\delta_{3k}^{(2)}$ se expresa así:

$$\delta_{3k}^{(2)} = \delta_{k3}^{(2)} = [(\overline{M}_3) + (\alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{12})(\overline{M}_1) + \alpha_{23} \cdot (\overline{M}_2)] \cdot (\overline{M}_k),$$

o

$$\delta_{3k}^{(2)} = \delta_{3k} + (\alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{12})\,\delta_{1k} + \alpha_{23}\delta_{2k} =$$

$$= \delta_{3k} + \alpha_{13}\delta_{1k} + \alpha_{23}(\alpha_{12}\delta_{1k} + \delta_{2k}) = \delta_{3k} + \alpha_{13}\delta_{1k} + \alpha_{23}\delta_{2k}^{(1)}. \qquad (14.55)$$

Por consiguiente, la ecuación $(3^{(2)})$ puede ser obtenida por la expresión simbólica

$$3^{(2)} = 3 + \alpha_{13} \cdot 1 + \alpha_{23} \cdot 2^{(1)}. \qquad (14.56)$$

Confrontando (14.53) y (14.56) obtenemos la ecuación simbólica

$$4^{(3)} = 4 + \alpha_{14} \cdot 1 + \alpha_{24} \cdot 2^{(1)} + \alpha_{34} \cdot 3^{(2)}. \qquad (14.57)$$

La ley de la formación de tales expresiones simbólicas está clara. Su empleo permite componer la tabla 3 para la composición de las ecuaciones incompletas (14.50). La fórmula general de α_{hi} tiene la forma

$$\alpha_{hi} = -\frac{\delta_{ki}^{(k-1)}}{\delta_{kk}^{(k-1)}}. \qquad (14.58)$$

En la primera línea de la tabla 3 se escribe la primera de las ecuaciones dadas de (14.42) y se determina la suma en la última columna de la tabla, de los coeficientes de esta línea, en la que se pueden incluir, también, los miembros de carga libres.

En la línea 2 se calculan los coeficientes α_{ik}. Luego, para la obtención de la ecuación $(1^{(1)})$, según (14.53), en la línea 3 se escribe la segunda de las ecuaciones dadas en (14.42) y también se determina la suma de sus coeficientes, inscripta en la última columna de la tabla. En el renglón 4, se escribe, nuevamente, según (14.53), la primera ecuación de (14.42) multiplicada por α_{12}. En la columna X_1 de esta línea ponemos puntos, por cuanto en la ecuación $(2^{(1)})$, el coeficiente de X_1 es igual a cero. Sumando por (14.53) las líneas 3 y 4 de la tabla, en la línea 5 obtenemos la ecuación $(2^{(1)})$.

Componemos, en calidad de control, la suma de los coeficientes por la línea 5 y por las líneas 3 y 4, en la columna, es la suma de los coeficientes s_i.

Si estas sumas por la horizontal y por la vertical coinciden, los cálculos han sido efectuados correctamente y, por lo tanto, se puede continuar el cálculo.

Después de la obtención de la ecuación $(2^{(1)})$, en la línea 6 de la tabla se calculan los coeficientes α_{2k}. Luego, en correspondencia con (14.56), en la línea 7 escribimos la tercera ecuación dada, en la 8, la ecuación (1) multiplicada por α_{13} y, en la 9, la ecuación obtenida $(2^{(1)})$, multiplicada por α_{23}. Como antes, conociendo que en la

Tabla 3

N° de línea	N° de la ecuación y coeficientes α	Incógnitas					Miembros libres Δ_{ip}	Suma de los coeficientes s_i
		X_1	X_2	X_3	...	X_n		
1	(1)	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}		δ_{1n}	Δ_{1p}	s_1
2	α_{1k}	·	$\alpha_{12}=-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$	$\alpha_{13}=-\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}$		$\alpha_{1n}=-\frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}}$	·	·
3	(2)	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}		δ_{2n}	Δ_{2p}	s_2
4	$\alpha_{12}\cdot(1)$	·	$\alpha_{12}\delta_{12}$	$\delta_{12}\delta_{13}$		$\alpha_{12}\delta_{1n}$	$\alpha_{12}\Delta_{1p}$	$\alpha_{12}s_1$
5	$(2^{(1)})$	·	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$		$\delta_{2n}^{(1)}$	$\Delta_{2p}^{(1)}$	$\rightarrow s_2^{(1)}$
6	α_{2k}	·	·	$\alpha_{23}=-\frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}$		$\alpha_{2n}=-\frac{\delta_{2n}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}$	·	·
7	(3)	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}		δ_{3n}	Δ_{3p}	s_3
8	$\alpha_{13}\cdot(1)$	·	·	$\alpha_{13}\delta_{13}$		$\alpha_{13}\delta_{1n}$	$\alpha_{13}\Delta_{1p}$	$\alpha_{13}s_1$
9	$\alpha_{23}\cdot(2^{(1)})$	·	·	$\alpha_{23}\delta_{23}^{(1)}$		$\alpha_{23}\delta_{2n}^{(1)}$	$\alpha_{23}\Delta_{2p}^{(1)}$	$\alpha_{23}s_2^{(1)}$
10	$(3^{(2)})$	·	·	$\delta_{33}^{(2)}$		$\delta_{3n}^{(2)}$	$\Delta_{3p}^{(2)}$	$\rightarrow s_3^{(2)}$

ecuación ($3^{(2)}$), los coeficientes de X_1 y X_2 son iguales a cero, en sus columnas ponemos puntos. Sumando las líneas 7, 8 y 9 en la 10 obtenemos los coeficientes de la ecuación ($3^{(2)}$). Luego, efectuamos el control de la suma de los δ por la línea 10 y por las 7, 8 y 9 de la columna s_i. En la línea 11 (si existe) calculamos los coeficientes α_{3k}, etc.

Así se compondrá el sistema de ecuaciones (14.50) ó, dicho de otra manera, se cumplirá el ciclo directo de la resolución (desde arriba hacia abajo). El cálculo de las incógnitas lo efectuamos cumpliendo la marcha inversa (de abajo hacia arriba), por las expresiones (14.51).

Si el sistema dado se vuelve a calcular bajo otra carga, entonces, la parte básica de los cálculos del ciclo directo se conserva, pero, en las columnas Δ_{iP} y s_i habrán otros números.

Señalemos en conclusión que, el sistema (14.42) contiene ecuaciones incompletas, entonces, la cantidad de cálculos de los ciclos directo e inverso depende de la numeración de las incógnitas.

Por cuanto los coeficientes del tipo $\alpha_{ik} = -\frac{\delta_{1k}}{\delta_{11}}$, por los que luego se multiplican las respectivas ecuaciones, se calculan en el segundo renglón de la tabla, resulta cómodo, que ellos sean iguales a cero, lo cual ocurre sólo cuando también los desplazamientos secundarios δ_{1k} son iguales a cero. De aquí se desprende la siguiente regla: *como primera incógnita conviene tomar a aquella incógnita X_k por la numeración previa de las incógnitas, para la cual la mayoría de los desplazamientos secundarios que contienen el índice k, son iguales a cero.*

La segunda regla que se desprende de que el coeficiente α_{12} se multiplica por un número mayor de multiplicandos que el α_{13} y, éste, a su vez, por uno mayor que el α_{14}, etc., es de menor importancia. Conviene tomar como incógnitas $X_2, X_3, \ldots, X_n$, a aquellas para las cuales $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{14} = 0$.

Después de la composición de las ecuaciones canónicas, la renumeración de las incógnitas no presenta grandes dificultades, pero, puede simplificar notablemente la resolución de las ecuaciones por el procedimiento de Gauss. Los pormenores están expuestos en [7].

Si el cálculo se hace aproximado, la suma de los coeficientes por líneas y columnas, no serán estrictamente iguales. Pero debido a que los errores pueden ir acumulándose, entonces, el cálculo deberá efectuarse con mucha precisión.

El procedimiento de Gauss puede ser recomendado para un número de incógnitas no mayor de 10-15.

Ahora, examinemos el cálculo de los coeficientes de influencia β_{ki}. Para esto, hagamos $\Delta_{kP} = 1$ y los restantes $\Delta_{iP} = 0$. No es difícil convencerse de que $\Delta_{kP}^{(k-1)} = 1$ y que los Δ_{kP} restantes, colocados en (14.51) más abajo, son iguales a cero (esto es, que $\Delta_{kP}^{(k-2)} = \Delta_{kP}^{(k-3)} = \Delta_{kP}^{(k-4)} = \ldots = \Delta_{kP} = 0$). Entonces, por (14.43)—(14.51), componemos la tabla 4.

Tabla 4

	De las ecuaciones (14.43)	De las ecuaciones (14.51)
$X_1 =$	β_{1k}	
$X_2 =$	β_{2k}	
...	.	
$X_i =$	β_{ik}	$\alpha_{i(i+1)}\beta_{(i+1)k} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nk}$
$X_{i+1} =$	$\beta_{(i+1)k}$	
...	.	
$X_k =$	β_{kk}	$\alpha_{k(k+1)}\beta_{(k+1)k} + \alpha_{k(k+2)}\beta_{(k+2)k} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{nk} - \frac{1}{\delta_{kk}^{k-1}}$
$X_{k+1} =$	$\beta_{(k+1)k}$	
...	.	
$X_n =$	β_{nk}	

De la tabla 4 obtenemos las fórmulas para los coeficientes de influencia

$$\beta_{kk} = -\frac{1}{\delta_{kk}^{(k-1)}} + \alpha_{k(k+1)}\beta_{(k+1)k} + \ldots + \underset{\text{(último término)}}{\alpha_{kn}\beta_{nk}}, \qquad (14.59)$$

en este caso $\alpha_{nn} = 0$.

$$\beta_{ik} = \alpha_{i(i+1)}\beta_{(i+1)k} + \ldots + \underset{\text{(último término)}}{\alpha_{in}\beta_{nk}}. \qquad (14.60)$$

En estas fórmulas, los índices k e i toman los siguientes valores.

Primera operación: suponiendo, en este caso, que $\alpha_{nn} = 0$, para la fórmula (14.59) $k = n$; para la (14.60) $k = n$, $i = n - 1$, $i = n - 2$, ..., $i = 1$.

Segunda operación: para la fórmula (14.59) $k = (n - 1)$; para la (14.60) $k = (n - 1)$, $i = (n - 2)$, $i = (n - 3)$, ..., $i = 1$.

Las siguientes operaciones son claras. Los coeficientes α se toman de la tabla del ciclo directo.

Ejemplo 33. Resolver el sistema de ecuaciones examinado en el ejemplo 32

$$4X_1 - 2X_2 + 2X_3 - 6 = 0;$$
$$-2X_1 + 6X_2 + 2X_3 - 16 = 0;$$
$$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 - 18 = 0.$$

Componemos la tabla 5. En las líneas 1, 5 y 10 fueron escritas las ecuaciones incompletas. Sus soluciones, por (14.51), son:

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3P}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} = -\frac{-\frac{18}{5}}{\frac{6}{5}} = 3;$$

$$X_2 = \alpha_{23}X_3 - \frac{\Delta_{2P}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} = -\frac{3}{5}\cdot 3 - \frac{-19}{5} = 2;$$

$$X_1 = \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{-6}{4} = 1.$$

Tabla 5

N° de línea	N° de ecuación y coeficientes α	incógnitas				
		X_1	X_2	X_3	Δ_{kP}	S
1	(1)	4	−2	+2	−6	−2
2	α_{1k}	·	$\alpha_{12}=\frac{1}{2}$	$\alpha_{13}=-\frac{1}{2}$		
3	(2)	−2	+6	+2	−16	−10
4	$\alpha_{12}\cdot(1)$	·	−1	1	−3	−1
5	$(2^{(1)})$	·	5	3	−19	$\rightarrow\overset{\downarrow}{-11}$
6	α_{2k}	·	·	$\alpha_{23}=-\frac{3}{5}$		
7	(3)	2	2	4	−18	−10
8	$\alpha_{13}\cdot(1)$	·	·	−1	+3	+1
9	$\alpha_{23}\cdot(2^{(1)})$	·	·	$-\frac{9}{5}$	$\frac{57}{5}$	$\frac{33}{5}$
10	$(3^{(2)})$	·	·	$\frac{6}{5}$	$-\frac{18}{5}$	$\rightarrow\overset{\downarrow}{-\frac{12}{5}}$

Por las fórmulas (14.59) y (14.60) hallamos los coeficientes de influencia: primera operación: para la fórmula (14.59) $k=3$, para la (14.60) $k=3$ e $i=2, 1$:

$$\beta_{33}=-\frac{1}{\delta_{33}^{(2)}}=-\frac{1}{\frac{6}{5}}=-\frac{5}{6};$$

$$\beta_{23}=\alpha_{23}\beta_{33}=-\frac{3}{5}\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$$\beta_{13}=\alpha_{12}\beta_{23}+\alpha_{13}\beta_{33}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{2}{3};$$

segunda operación: para la fórmula (14.59) $k=2$, para la (14.60) $k=2$ e $i=1$:

$$\beta_{22}=-\frac{1}{\delta_{22}^{(1)}}+\alpha_{23}\beta_{32}=-\frac{1}{\frac{5}{3}}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2};$$

$$\beta_{12}=\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{13}\beta_{32}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2};$$

tercera operación: para la fórmula (14.59) $k=1$:

$$\beta_{11}=-\frac{1}{\delta_{11}}+\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{13}\beta_{31}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{5}{6}.$$

4. PROCEDIMIENTO DE LAS APROXIMACIONES SUCESIVAS

A la incógnita con el coeficiente δ_{kk}, de cada ecuación (14.42), la expresamos por los demás coeficientes en la forma siguiente:

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}+c_{12}X_2+c_{13}X_3+\ldots+c_{1n}X_n;$$

. . . . . .

$$X_k=-\frac{\Delta_{kP}}{\delta_{kk}}+c_{k1}X_1+c_{k2}X_2+\ldots+c_{k(k+1)}X_{k+1}+\ldots+c_{kn}X_n;$$

. . . . . .

$$X_n=-\frac{\Delta_{nP}}{\delta_{nn}}+c_{n1}X_1+c_{n2}X_2+\ldots+c_{n(n-1)}X_{n-1},$$

donde

$$c_{kl}=-\frac{\delta_{kl}}{\delta_{kk}}$$

Durante el cálculo de los valores de la incógnita X_k por la i-ésima aproximación, emplearemos los últimos valores de las incógnitas restantes, hallados de las aproximaciones anteriores, es decir, efectuaremos el cálculo por el siguiente esquema:

$$\left.\begin{aligned}
&X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}+c_{12}X_2^{(i-1)}+c_{13}X_3^{(i-1)}+\ldots+c_{1n}X_n^{(i-1)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_k^i=-\frac{\Delta_{kP}}{\delta_{kk}}+c_{k1}X_1^i+c_{k2}X_2^i+\ldots+c_{k(k-1)}X_{k-1}^i+\\
&\qquad+c_{k(k+1)}X_{k+1}^{(i-1)}+\ldots+c_{kn}X_n^{i-1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_n^i=-\frac{\Delta_{nP}}{\delta_{nn}}+c_{n1}X_1^i+c_{n2}X_2^i+\ldots+c_{n(n-1)}X_{n-1}^i,
\end{aligned}\right\}\quad(14.61)$$

donde el índice superior indica el orden de aproximación.

Para determinar el valor de la incógnita X_k en la primera aproximación, los valores de las incógnitas X^0_{k+1}, X^0_{k+2}, . . ., X^0_n en la aproximación inicial pueden ser dados arbitrariamente, por ejemplo, iguales a cero.

Está demostrado que para las ecuaciones del tipo de las ecuaciones canónicas del método de fuerzas (y del de desplazamientos, véase el capítudo 18), el proceso de aproximación expuesto, siempre es coincidente.

Los valores de las incógnitas por aproximaciones, al principio del proceso no es indispensable determinarlos con exactitud, pudiéndose efectuar el cálculo con la regla de cálculo. Solamente al final se debe pasar a un cálculo más preciso. Es interesante señalar que, en un proceso coincidente, el error cometido en los cálculos desaparece gradualmente y no se refleja en el resultado definitivo, pero, debido al error, el proceso de las aproximaciones se alarga un poco.

Ejemplo 34. Resolver este sistema de ecuaciones por el método de las aproximaciones sucesivas:

$$8X_1 - X_2 + X_3 - 18 = 0;$$
$$-X_1 + 4X_2 + X_3 - 10 = 0;$$
$$X_1 + X_2 + 8X_3 - 36 = 0.$$

Por el esquema (14.61):

$$X^i_1 = \frac{18}{8} + \frac{1}{8} X^{(i-1)}_2 - \frac{1}{8} X^{(i-1)}_3;$$

$$X^i_2 = \frac{10}{4} + \frac{1}{4} X^i_1 - \frac{1}{4} X^{(i-1)}_3;$$

$$X^i_3 = \frac{36}{8} - \frac{1}{8} X^i_1 - \frac{1}{8} X^i_2.$$

Los valores de las incógnitas, en la primera aproximación, siendo $X^0_2 = 0$, $X^0_3 = 0$ son:

$$X^1_1 = \frac{18}{8},$$

$$X^1_2 = \frac{10}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{18}{8} = \frac{49}{16};$$

$$X^1_3 = \frac{36}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{18}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{49}{16} = \frac{491}{128}.$$

Y así sucesivamente. Los valores de las incógnitas, por la tercera aproximación, son; $X_1 = 2{,}013$, $X_2 = 2{,}011$ y $X_3 = 3{,}996$. Sus valores exactos son $X_1 = 2$, $X_2 = 2$ y $X_3 = 4$.

§ 134. EMPLEO DE LOS DIAGRAMAS ORTOGONALES. La sucesiva modificación del sistema básico para la obtención de las ecuaciones del ciclo inverso (14.50), permite tener, en el sistema básico $k = 1$ veces hiperestático, el diagrama de $\overline{M}^{(k-1)}_k$ debido a $X_k = 1$, el cual, siendo $i < k$, es ortogonal para todos los diagramas de $M^{(i-1)}_i$ debidos a $X_i = 1$, obtenidos en los sistemas básicos $i - 1$

veces hiperestáticos. Esto significa que la $\sum \int \overline{M}_i^{(i-1)} \frac{\overline{M}_k^{(k-1)}}{EJ} ds$ por todo el sistema, deberá ser igual a cero, lo mismo que el producto de los dos diagramas ortogonales $(\overline{M}_i^{(i-1)})$, $(\overline{M}_k^{(k-1)})$, si es que la «multiplicación» de éstos es posible.

Efectivamente, la fuerza $X_k = 1$, aplicada al sistema básico $k-1$ veces hiperestático, no origina desplazamientos por la dirección de las incógnitas cuyo índice es menor, por cuanto en este sistema se han introducido vínculos por sus direcciones.

A los propios diagramas ortogonales los podemos examinar como diagramas colectivos o agrupados en el sistema básico isostático, debidos a la fuerza $X_k = 1$ y a todas las reacciones originadas por ella en los vínculos superfluos del sistema $k-1$ veces hiperestático.

Por cuanto en un sistema hiperestático básico, a la $\sum \int \overline{M}_i^{(i-1)} \times \frac{\overline{M}_k^{(k-1)}}{EJ} ds$ se la puede examinar como un desplazamiento en grupo o colectivo debido a las fuerzas originadas por las incógnitas $X_k = 1$, por la dirección de las fuerzas provocadas por $X_i = 1$, en los correspondientes sistemas $k-1$ e $i-1$ veces hiperestáticos, entonces, el resultado no es difícil de adivinar. El es igual a cero, por cuanto las componentes del desplazamiento colectivo, es decir, los desplazamientos por la dirección de cada fuerza, originada por la fuerza $X_i = 1$, son iguales a cero. Por consiguiente,

$$\sum \int \overline{M}_i^{(i-1)} \frac{\overline{M}_k^{(k-1)}}{EJ} ds = 0.$$

Los diagramas ortogonales colectivos pueden ser obtenidos de los simples por el siguiente esquema:

$$(\overline{M}_1) = (\overline{M}_1);$$
$$(\overline{M}_2^{(1)}) = (\overline{M}_2) + \alpha_{12}(\overline{M}_1);$$
$$(\overline{M}_3^{(2)}) = (\overline{M}_3) + \alpha_{13}(\overline{M}_1) + \alpha_{23}(\overline{M}_2^{(1)}).$$

O en la forma general:

$$(\overline{M}_k^{(k-1)}) = (\overline{M}_k) + \alpha_{1k}(\overline{M}_1) + \alpha_{2k}(\overline{M}_2^{(1)}) + \ldots + \alpha_{(k-1)k}(M_{k-1}^{(k-2)}) \tag{14.62}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Los coeficientes α se calculan por la tabla 3 del ciclo directo de resolución de ecuaciones por el método de Gauss.

Ahora, en calidad de incógnitas, tomamos no las fuerzas simples X_k, sino, las generalizadas. Supongamos que Y_k es una fuerza generalizada del k-ésimo grupo de fuerzas, aplicada al sistema básico isostático y originada por la fuerza $X_k = 1$ en el sistema básico k-1 veces hiperestático. Entonces, el diagrama de $(\overline{M}_k^{(k-1)})$ puede ser

examinado como diagrama unitario de la fuerza generalizada $Y_k = 1$. El desplazamiento generalizado, correspondiente a Y_k, será un desplazamiento colectivo compuesto por los desplazamientos en dirección de las incógnitas anteriores $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

La ortogonalidad de los diagramas permite escribir las ecuaciones canónicas en la siguiente forma:

$$\delta_{11}Y_1 + \Delta_{1P} = 0;$$
$$\delta_{22}^{(1)}Y_2 + \Delta_{2P}^{(1)} = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_{nn}^{(n-1)}Y_n + \Delta_{nP}^{(n-1)} = 0, \qquad (14.63)$$

Los desplazamientos $\delta_{11}, \delta_{22}^{(1)}, \ldots, \delta_{nn}^{(n-1)}$ son contenidos en la tabla del ciclo directo, por la cual se calcularon los coeficientes α. Si en esta misma tabla llenamos también la columna Δ_{kP}, entonces, en ella tendremos a todos los miembros libres $\Delta_{1P}, \Delta_{2P}^{(1)}, \ldots, \Delta_{nP}^{(n-1)}$ de las ecuaciones (14.63).

Además, por cuanto en el sistema básico isostático, los desplazamientos generalizados del tipo $\delta_{kk}^{(k-1)}$ y $\delta_{kP}^{(k-1)}$ son iguales a los desplazamientos simples en el sistema básico $k-1$ veces hiperestático y, los últimos pueden ser determinados, en el sistema isostático, por medio del estado auxiliar, entonces, podemos escribir

$$\delta_{kk}^{(k-1)} = \sum \int \overline{M}_k \frac{\overline{M}_k^{(k-1)}}{EJ} ds; \qquad (14.64)$$

$$\Delta_{kP}^{k-1} = \sum \int \overline{M}_k^{(k-1)} \frac{M_P^0}{EJ} ds. \qquad (14.65)$$

Teniendo en cuenta la expresión de los momentos $\overline{M}_k^{(k-1)}$, por (14.62), obtenemos:

$$\delta_{kk}^{(k-1)} = \delta_{kk} + \alpha_{1k}\delta_{1k} + \alpha_{2k}\delta_{2k}^{(1)} + \ldots + \alpha_{(k-1)k}\delta_{(k-1)k}^{(k-2)}; \qquad (14.64')$$

$$\Delta_{kP}^{(k-1)} = \Delta_{kP} + \alpha_{1k}\Delta_{1P} + \alpha_{2k}\Delta_{2P}^{(1)} + \ldots + \alpha_{(k-1)k}\Delta_{(k-1)k}^{(k-2)}. \qquad (14.65')$$

La resolución de las ecuaciones (14.63) no presenta dificultades. En el sistema dado, el diagrama buscado de M_P será:

$$(M_P) = (\overline{M}_1)Y_1 + (\overline{M}_2^{(1)})Y_2 + (\overline{M}_3^{(2)})Y_3 + \ldots + (\overline{M}_n^{(n-1)})Y_n + (M_P^0). \qquad (14.66)$$

§ 135. INCOGNITAS Y DIAGRAMASCOLECTIVOS. En el § 134, ya hemos examinado la fórmula particular de las incógnitas y los diagramas colectivos. Aquí examinaremos esta cuestión en forma general.

La sustitución de las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$ simples por las $Y_1, \ldots, Y_n$ nuevas, lo efectuamos por medio de las proporciones:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \eta_{11}Y_1 + \eta_{12}Y_2 + \ldots + \eta_{1k}Y_k \ldots + \eta_{1n}Y_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_k &= \eta_{k1}Y_1 + \eta_{k2}Y_2 + \ldots + \eta_{kk}Y_k + \ldots + \eta_{kn}Y_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= \eta_{n1}Y_1 + \eta_{n2}Y_2 + \ldots + \eta_{nk}Y_k + \ldots + \eta_{nn}Y_n. \end{aligned}\right\} \quad (14.67)$$

donde Y_i son las incógnitas nuevas y η_{ik} ciertos coeficientes arbitrarios, parte de los cuales pueden ser iguales a cero.

Para que exista la posibilidad de tal sustitución, o sea, para que las incógnitas nuevas y viejas sean recíprocamente determinables,

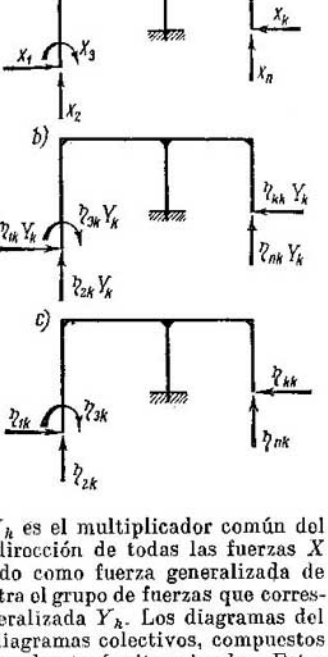


Fig. 287

es indispensable que el determinante de los coeficientes η no sea igual a cero, esto es, que

$$D = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \ldots & \eta_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \eta_{k1} & \eta_{k2} & & \eta_{kn} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & & \eta_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (14.68)$$

Por eso es que ninguna columna del determinante (14.68) y ninguna de sus líneas pueden estar compuestas sólo de ceros. Por consiguiente, el número mínimo de η, distinto de cero, es igual al número n de incógnitas.

Aclaremos, ahora, el sentido estático de las nuevas incógnitas. De la expresión (16.67) se ve que Y_k es el multiplicador común del grupo de fuerzas aplicadas por la dirección de todas las fuerzas X (fig. 287, *b*) y que puede ser tomado como fuerza generalizada de este grupo. En la fig. 287, *c* se muestra el grupo de fuerzas que corresponde a la unidad de la fuerza generalizada Y_k. Los diagramas del grupo de fuerzas representan en sí diagramas colectivos, compuestos por los diagramas unitarios debidos a las incógnitas simples. Estos

diagramas colectivos de M_k^* se determinan por las expresiones:

$$\begin{aligned}
(\overline{M}_1^*) &= \eta_{11}\cdot(\overline{M}_1) + \eta_{21}\cdot(\overline{M}_2) + \ldots + \eta_{n1}\cdot(\overline{M}_n);\\
(\overline{M}_2^*) &= \eta_{12}\cdot(\overline{M}_1) + \eta_{22}\cdot(\overline{M}_2) + \ldots + \eta_{n2}\cdot(\overline{M}_n);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(\overline{M}_k^*) &= \eta_{1k}\cdot(\overline{M}_1) + \eta_{2k}\cdot(\overline{M}_2) + \ldots + \eta_{nk}\cdot(\overline{M}_n);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(\overline{M}_n^*) &= \eta_{1n}\cdot(\overline{M}_1) + \eta_{2n}\cdot(\overline{M}_2) + \ldots + \eta_{nn}\cdot(\overline{M}_n).
\end{aligned} \tag{14.69}$$

Las líneas de la matriz de los coeficientes η de las expresiones (14.69) son las columnas de la matriz de los coeficientes η de las expresiones (14.67). La composición de los diagramas colectivos por las expresiones (14.69), puede ser efectuada independientemente de las transformaciones de (14.67), con la condición de que el determinante de los coeficientes (14.69) sea diferente de cero.

Los diagramas simples de $\overline{M}_k$ son algunos casos particulares de tales diagramas colectivos.

Si designamos con la letra δ_{km} al desplazamiento generalizado correspondiente a la fuerza generaliza Y_k debida a la fuerza generalizada Y_m, como desplazamiento correspondiente a la unidad de esta última (desplazamiento unitario) y, por Δ_{kP}, al desplazamiento generalizado correspondiente a la fuerza generalizada Y_k debida a la carga, entonces, las ecuaciones canónicas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\delta_{k1}Y_1 + \delta_{k2}Y_2 + \delta_{k3}Y_3 + \ldots + \delta_{kn}Y_n + \Delta_{kP} = 0. \tag{14.70}$$

El segundo miembro de las ecuaciones canónicas es igual a cero, porque el desplazamiento generalizado en el sistema dado también lo es, debido a que él es una combinación lineal de desplazamientos simples y, estos últimos, son iguales a cero.

Los desplazamientos generalizados se determinan por las fórmulas corrientes:

$$\delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k^* \frac{\overline{M}_m^*}{EJ}\, ds = (\overline{M}_k^*)\cdot(\overline{M}_m^*);$$

$$\Delta_{kP} = \sum \int \overline{M}_k^* \frac{\overline{M}_P^0}{EJ}\, ds = (\overline{M}_k^*)\cdot(\overline{M}_P^0).$$

Para abreviar la exposición, omitiremos las integrales con N y Q. No obstante, en las expresiones expuestas, las fuerzas internas de los estados unitarios se determinan, no de las fuerzas simples, sino, de las colectivas.

Los diagramas definitivos se componen por la expresión (14.18). Por ejemplo, el diagrama de los momentos flectores es

$$(M_P) = (\overline{M}_1^*)\,Y_1 + (\overline{M}_1^*)\,Y_2 + \ldots + (\overline{M}_n)Y_n + (M_P^0). \tag{14.71}$$

Así, en lugar de las incógnitas simples se pueden emplear las colectivas, expresadas por las fuerzas generalizadas y, en lugar de

los diagramas simples, los colectivos. En este caso, para las incógnitas simples, todo el orden del cálculo se conserva también aquí.

Con otras palabras, en el cálculo se pueden utilizar como diagramas unitarios comunes, por la expresión (14.69), los unitarios colectivos, compuestos por los unitarios simples, sólo que las incógnitas no serán ya las usuales, sino fuerzas generalizadas.

Por cuanto las ecuaciones canónicas (14.70) en el caso de incógnitas colectivas (de diagramas colectivos), por su forma, no se diferencian de las ecuaciones canónicas corrientes, entonces, la simple

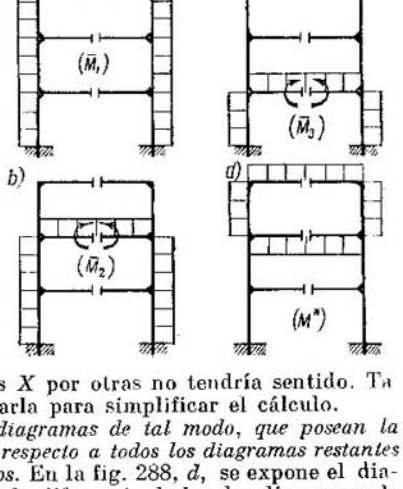


Fig. 288

sustitución de unas incógnitas X por otras no tendría sentido. La sustitución es necesario emplearla para simplificar el cálculo.

Es necesario componer los diagramas de tal modo, que posean la propiedad de ortogonalidad con respecto a todos los diagramas restantes o a la mayor parte posible de ellos. En la fig. 288, *d*, se expone el diagrama colectivo de (M*), igual a la diferencia de los dos diagramas de $(\overline{M}_1)$ y $(\overline{M}_2)$ y que es ortogonal al diagrama de $(\overline{M}_3)$.

La cuestión sobre la construcción de los diagramas ortogonales se resuelve, analíticamente, sobre la base de tales razonamientos. El límite de las simplificaciones posibles de las ecuaciones canónicas será, cuando todos los desplazamientos secundarios se reduzcan a cero. Entonces, cada ecuación contendrá una sola incógnita. Para esto, es necesario reducir a cero, teniendo en cuenta la reciprocidad de los coeficientes, $\frac{n(n-1)}{2}$ desplazamientos secundarios, lo que permite componer la misma cantidad de ecuaciones para la determinación de $\frac{n(n-1)}{2}$ coeficientes η_{ik}.

El número total de coeficientes η es igual a n^2. Por consiguiente, el número m de coeficientes η que pueden ser fijados arbitrariamente se determina por la expresión $m = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. El número más cómodo y sim-

ple es el cero. Por eso, es conveniente hacer todos los $\frac{n(n-1)}{2}$ coeficientes iguales a cero. Por esto es imposible, puesto que o el determinante de (14.68) se anula, o reducir a cero $\frac{n(n-1)}{2}$ desplazamientos secundarios no es factible.

Corrientemente, los $\frac{n(n-1)}{2}$ coeficientes, ubicados más arriba o más abajo de la diagonal principal de la matriz (14.69), se toman iguales a cero

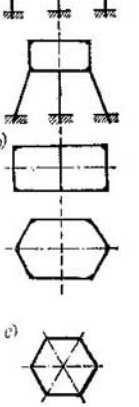


Fig. 289

y, todos los que pertenecen a ella, iguales a la unidad, es decir,

$$\left.\begin{aligned} &(\overline{M}_1^*) = (\overline{M}_1);\\ &(\overline{M}_2^*) = \eta_{12}(\overline{M}_1) + (\overline{M}_2);\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(\overline{M}_n^*) = \eta_{1n}(\overline{M}_1) + \eta_{2n}(\overline{M}_2) + \ldots + (\overline{M}_n). \end{aligned}\right\} \quad (14.72)$$

En este caso, se obtienen los mismos diagramas ortogonales que con la resolución de las ecuaciones canónicas por el procedimiento de Gauss (véase el § 134).

§ 136. SIMPLIFICACIONES DURANTE EL CALCULO DE SISTEMAS SIMETRICOS. Los sistemas pueden ser simétricos con respecto a un eje (fig. 289, *a*), a dos, (fig. 289, *b*), y a muchos (fig. 289, *c*).

Para la simplificación del cálculo, el sistema básico deberá ser simétrico o convencionalmente simétrico. Si el sistema dado es simétrico con respecto a un eje, entonces, el sistema básico también deberá serlo con respecto a él (fig. 290, *a*). Pero si el sistema dado es simétrico con respecto a dos ejes, entonces, el básico, cuando esto es posible, también deberá ser simétrico a estos dos ejes (fig. 290, *b*) y, cuando esto no es posible deberá ser simétrico respecto a uno de estos ejes (fig. 290, *c*).

1. SISTEMAS CON UN EJE DE SIMETRÍA (PROCEDIMIENTO DE LAS INCOGNITAS PARES)

Examinemos cierto sistema básico (fig. 291) que contiene las incógnitas $X_1, \ldots, X_4$. Supongamos que las fuerzas X_1 y X_3 dispuestas simétricamente (pero no iguales), están compuestas por dos fuerzas Y_1 e Y_2, a condición de que $X_1 = Y_1 + Y_2$ y $X_3 = Y_1 - Y_2$ y, las fuerzas X_2 y X_4, por las fuerzas Y_3 e Y_4, siendo $X_2 = Y_3 + Y_4$ y $X_4 = Y_3 - Y_4$.

Tomamos los grupos de fuerzas $Y_1, \ldots, Y_4$ en calidad de nuevas incógnitas pares.

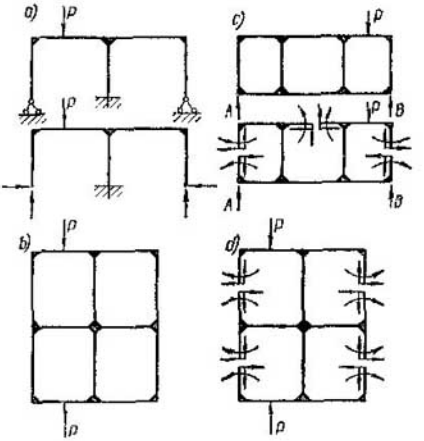


Fig. 290

Los grupos Y_1 e Y_3 son simétricos y, los Y_2 e Y_4, inversamente simétricos. A las magnitudes de las incógnitas pares $Y_1 \ldots, Y_4$ las consideraremos, para ellos, como fuerzas generalizadas. Los desplazamientos unitarios generalizados δ_{km} que corresponden a

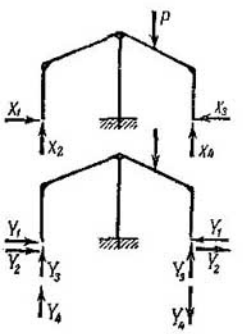


Fig. 291

estos grupos, estarán compuestos de la suma o diferencia de dos desplazamientos simples por la dirección de cada grupo de fuerzas.

Escribimos las ecuaciones canónicas para las fuerzas generalizadas. Por cuanto en el sistema dado, los desplazamientos simples son iguales a cero, entonces, también serán iguales a cero los desplazamientos generalizados. Por eso, las ecuaciones canónicas tienen la forma

usual:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{11}Y_1+\delta_{12}Y_2+\delta_{13}Y_3+\delta_{14}Y_4+\Delta_{1P}=0;\\
\delta_{21}Y_1+\delta_{22}Y_2+\delta_{23}Y_3+\delta_{24}Y_4+\Delta_{2P}=0;\\
\delta_{31}Y_1+\delta_{32}Y_2+\delta_{33}Y_3+\delta_{34}Y_4+\Delta_{3P}=0;\\
\delta_{41}Y_1+\delta_{42}Y_2+\delta_{43}Y_3+\delta_{44}Y_4+\Delta_{4P}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Es sabido que un grupo de fuerzas simétrico al actuar sobre un sistema simétrico no origina desplazamientos de simetría inversa y, viceversa. Esto significa que el trabajo de un grupo de fuerzas simétrico (de simetría inversa) en los desplazamientos debidos a los grupos de fuerzas de simetría inversa (simétricos) es igual a cero. Por consiguiente, los desplazamientos generalizados debidos al grupo de fuerzas simétrico (de simetría inversa), correspondientes a la fuerza generalizada del grupo de fuerzas de simetría inversa (simétrico), también, serán iguales a cero. Por eso, los desplazamientos secundarios δ_{12}, δ_{14}, δ_{23} y δ_{34} son iguales a cero, y las ecuaciones canónicas se simplifican

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{11}Y_1+\delta_{13}Y_3+\Delta_{1P}=0;\\
\delta_{22}Y_2+\delta_{24}Y_4+\Delta_{2P}=0;\\
\delta_{31}Y_1+\delta_{33}Y_3+\Delta_{3P}=0;\\
\delta_{42}Y_2+\delta_{44}Y_4+\Delta_{4P}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.73)$$

Las ecuaciones primera y tercera contienen sólo a las fuerzas generalizadas de los grupos simétricos de incógnitas pares (incógnitas simétricas) y, las segunda y cuarta, a las de los grupos de simetría inversa de incógnitas pares (incógnitas inversamente simétricas).

Con otras palabras, el sistema de ecuaciones canónicas (a) se dividió en dos sistemas independientes.

Así será para cualquier sistema simétrico. El número total de incógnitas básicas se conserva, pero, con incógnitas pares, las ecuaciones canónicas se dividen en dos sistemas independientes: uno con incógnitas simétricas y, el otro, con incógnitas inversamente simétricas.

Esto significa una gran simplificación. Resolver dos sistemas de ecuaciones con menor número de incógnitas en cada uno, es mucho más simple que resolver un solo sistema con el número total de incógnitas. Claro está que, incluso, cuando los sistemas poseen un número par de incógnitas las ecuaciones canónicas no siempre se dividirán en dos sistemas con igual número de incógnitas. Pero siempre un sistema contendrá incógnitas simétricas y el otro, incógnitas inversamente simétricas.

Las reacciones de los vínculos eliminados simétricamente distribuidos en el sistema básico, se agrupan en incógnitas pares. Si las incógnitas están ubicadas en el eje de simetría (fig. 292), entonces, o de hecho, ya son incógnitas pares (X_1, X_2 y X_3) en la fig. 292, *a*) o representan incógnitas ya simétricas (X_4 en la fig. 292, *b*) o de simetría inversa, a las que no es necesario agrupar.

Todos los razonamientos fueron efectuados independientemente del tipo y la magnitud de la carga. Esto significa que todas las deducciones son correctas cualquiera que sea la carga que actúe sobre un sistema simétrico. Por cuanto, no obstante, cualquier carga puede ser representada como la suma de dos cargas una simétrica y la otra de simetría inversa, entonces, los miembros colectivos debidos a la carga pueden ser escritos así:

$$\Delta_{kP} = \Delta^{s}_{kP} + \Delta^{i.s}_{kP}, \qquad (14.74)$$

donde Δ^{s}_{kP} es el desplazamiento correspondiente a la fuerza generalizada Y_k debida a la carga simétrica y, $\Delta^{i.s}_{kP}$ idem, pero debido a la carga de simetría inversa.

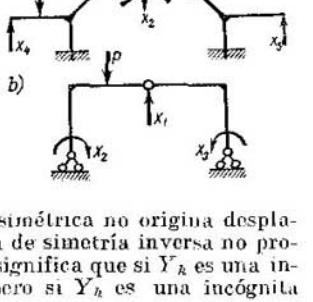


Fig. 292

En los sistemas simétricos, la carga simétrica no origina desplazamientos de simetría inversa y, la carga de simetría inversa no provoca desplazamientos simétricos. Esto significa que si Y_k es una incógnita simétrica, entonces, $\Delta^{i.s}_{kP} = 0$, pero si Y_k es una incógnita de simetría inversa, entonces $\Delta^{s}_{kP} = 0$.

Si la carga efectiva es simétrica, entonces, todas las $\Delta^{i.s}_{kP} = 0$, significando esto, que las ecuaciones canónicas que contienen incógnitas de simetría inversa, no tienen términos libres y todas las incógnitas son iguales a cero. Por consiguiente, *en el caso de carga simétrica, todas las incógnitas de simetría inversa son iguales a cero.* Con tales razonamientos se puede demostrar que *para una carga de simetría inversa, todas las incógnitas simétricas son también iguales a cero.*

Esta circunstancia permite emplear diferentes sistemas básicos para el cálculo de cargas simétricas o de simetría inversa.

El cálculo de los sistemas simétricos se puede seguir simplificando si, dentro de los límites de cada categoría de incógnitas, se utilizan las distintas simplificaciones expuestas anteriormente, en particular, los diagramas ortogonales colectivos.

2. SISTEMAS CON DOS EJES DE SIMETRÍA

En los sistemas básicos con dos ejes de simetría es necesario agrupar las incógnitas en los siguientes grupos (fig. 293): simétricos con respecto a los dos ejes (fig. 293, *a*); simétricos sólo con respecto

al eje z e inversamente simétricos con respecto al eje y (fig. 293, *b*); simétricos con respecto al eje y e inversamente simétricos con respecto al eje z (fig. 293, *c*) y, de simetría inversa con respecto a ambos ejes (fig. 293, *d*).

En correspondencia con tal agrupamiento, las ecuaciones canónicas se descompondrán en cuatro sistemas independientes, cada uno de los cuales contendrá sólo incógnitas de una de las cuatro categorías.

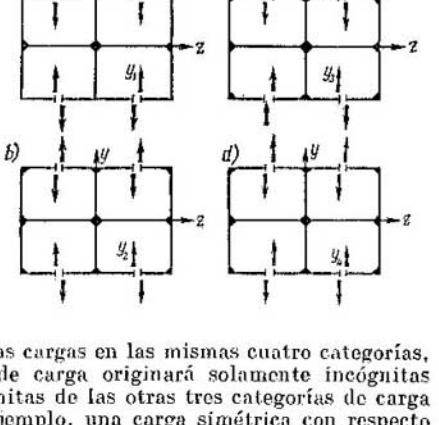


Fig. 293

Si dividimos también las cargas en las mismas cuatro categorías, entonces, cada categoría de carga originará solamente incógnitas de su categoría. Las incógnitas de las otras tres categorías de carga serán iguales a cero. Por ejemplo, una carga simétrica con respecto a los dos ejes origina sólo incógnitas del primer grupo.

Si en un sistema básico, simétrico solamente con respecto a un eje, hay cuatro incógnitas ubicadas simétricamente con respecto a los dos ejes de simetría del sistema dado, entonces, su agrupamiento por la fig. 293, puede conducir, frecuentemente, a que se liquiden algunos desplazamientos secundarios.

Ejemplo 35. Construir el diagrama de los momentos flectores en el pórtico de la fig. 294.

El sistema básico con incógnitas pares, los diagramas unitarios debidos a ellas y el diagrama de carga, se exponen en la fig. 294.

Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}Y_1+\Delta_{1P}=0;$$

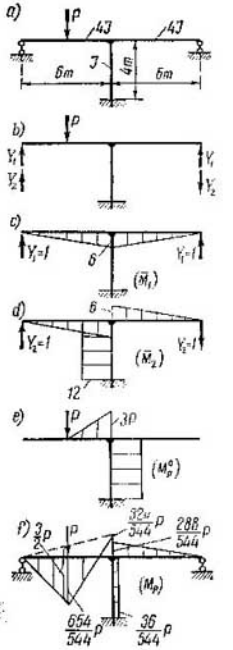
$$\delta_{22}Y_2+\Delta_{2P}=0.$$

Los coeficientes y términos libres son:

$$\delta_{11}=(\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_1)=\left(\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4EJ}\right)2=\frac{36}{EJ},$$

$$\Delta_{1P}=(M_P^0)\cdot(\overline{M}_1)=-\frac{3P\cdot 3}{2}\cdot\frac{3}{4EJ}=-\frac{45P}{8EJ};$$

Fig. 294



$$\delta_{22}=\delta_{11}+\frac{12\cdot 4\cdot 12}{EJ}=\frac{612}{EJ},$$

$$\Delta_{2P}=(M_P^a)\cdot(\overline{M}_2)=-\frac{3P3}{2}\cdot\frac{5}{4EJ}-$$

$$-\frac{3P\cdot 4\cdot 12}{EJ}=-\frac{1\,197}{8EJ}P.$$

Las ecuaciones canónicas con los coeficientes numéricos son:

$$36Y_1-\frac{45}{8}P=0;$$

$$612Y_2-\frac{1\,197}{8}P=0,$$

de donde $Y_1=\frac{5}{32}P$, $Y_2=\frac{133}{544}P$.

El diagrama de los momentos flectores está representado en la fig. 294, *f*.

Lo verificamos multiplicandolo por los diagramas unitarios:

$$(M_P)\cdot(\overline{M}_1)=\frac{3}{2}P\,\frac{6}{2}\cdot\frac{3}{4EJ}-$$

$$-\frac{324}{544}P\,\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4EJ}-$$

$$-\frac{288}{544}P\,\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4EJ}=0;$$

$$(M_P)\cdot(\overline{M}_2)=\frac{3}{2}P\,\frac{6}{2}\cdot\frac{3}{4EJ}-\frac{324}{544}P\,\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4EJ}+$$

$$+\frac{288}{544}P\,\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4EJ}-\frac{36P\cdot 4}{544}\cdot\frac{12}{EJ}=0.$$

§ 137. METODO ESTATICO DE CONTSRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA. Al construir las líeas de influencia por el método estático, ante todo se construyen las líneas de influencia de las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$, a las cuales, en adelante, las llamaremos l. i. *básicas*, por cuanto por medio de ellas pueden ser representadas las líneas de influencia de otras magnitudes.

Las líneas de influencia básicas se obtienen por las ecuaciones (14.43):

$$\left.\begin{aligned}&\text{l.i. de } X_1=\beta_{11}\delta_{1P}+\beta_{12}\delta_{2P}+\ldots+\beta_{1n}\delta_{nP};\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\text{l.i. de } X_k=\beta_{k1}\delta_{1P}+\beta_{k2}\delta_{2P}+\ldots+\beta_{kn}\delta_{nP};\\&\text{l.i. de } X_n=\beta_{n1}\delta_{1P}+\beta_{n2}\delta_{2P}+\ldots+\beta_{nn}\delta_{nP}.\end{aligned}\right\}\qquad(14.75)$$

Los términos de carga del tipo δ_{kP} son funciones de la posición del peso $P = 1$, esto es, las expresiones analíticas de las líneas de influencia de los desplazamientos δ_{kP} o, por el teorema de la reciprocidad de los desplazamientos unitarios las expresiones analíticas de los desplazamientos de la línea de carga δ_{kT} por la dirección del peso móvil unitario, debidas, en el sistema básico, a las fuerzas unitarias $X_k = 1$.

Esto mismo, pero en la forma matriz, es

$$\text{l.i. de } X = B\overline{D}_P = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \dots \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \dots \beta_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \dots \beta_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \delta_{1P} \\ \delta_{2P} \\ \dots \\ \delta_{nP} \end{Vmatrix}. \qquad (14.76)$$

Si se considera, no la ecuación de la línea de influencia, sino, sólo el cálculo de las ordenadas de dicha línea de influencia, en puntos aislados de aplicación del peso, entonces, es necesario transformar la matriz de columna $\overline{D}_P = \| \delta_{iP} \|$ en matriz completa, cuyas columnas determinan $\overline{D}_P$, en dependencia del punto concreto de aplicación del peso.

Las líneas de influencia de las fuerzas internas M, Q y N y de otras magnitudes que permiten el empleo del principio de independencia de acción de las fuerzas, se expresan a través de las líneas de influencia básicas, por la expresión general (14.17). En este caso, es necesario tener en cuenta que, para la sección dada, las magnitudes $\overline{S}_1, \dots, \overline{S}_n$ son constantes y, las $X_1, \dots, X_n$ y S^0, son variables. Esto significa que la l.i. de S se obtiene sumando las l.i. de $X_1, \dots, X_n$, multiplicadas por los coeficientes $\overline{S}_i$ y, las líneas de influencia de la misma magnitud S^0_P, en el sistema básico. Esto se puede representar, en la forma general, con la siguiente expresión simbólica:

$$\text{l.i. de } S = (\text{l.i. de } X_1)\,\overline{S}_1 + (\text{l.i. de } X_2)\,\overline{S}_2 + \dots + (\text{l.i. de } X_n)\,\overline{S}_n + \text{l.i. de } S^0. \qquad (14.77)$$

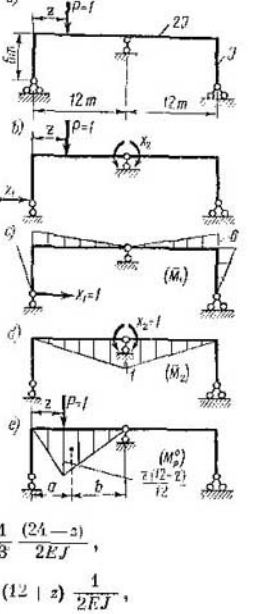
Si el sistema es simétrico, es necesario emplear incógnitas pares. En tales casos, las líneas de influencia de las incógnitas pares son al mismo tiempo las líneas de influencia básicas. La expresión (14.77) conserva su vigor, sólo que aquí, $\overline{S}_k$ es la magnitud correspondiente a las fuerzas unitarias pares.

Ejemplo 36. Construir las líneas de influencia de M y Q en la sección de un pórtico (fig. 295).

En la fig. 295, *b*, *c*, *d* y *e* se exponen el sistema básico y los diagramas unitarios y de carga. Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0.$$

Fig. 295



Los coeficientes y términos libres de ollas son:

$$\delta_{11}=(\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_1)=$$

$$=\left(\frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}6\,\frac{1}{EJ}+\frac{6\cdot 12}{2}\,\frac{2}{3}6\,\frac{1}{2EJ}\right)2=\frac{288}{EJ};$$

$$\delta_{12}=(\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_2)=$$

$$=-\left(\frac{6\cdot 12}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2EJ}\right)2=-\frac{12}{EJ};$$

$$\delta_{22}=(\overline{M}_2)\cdot(\overline{M}_2)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}12\cdot\frac{2}{3}1\,\frac{1}{2EJ}\right)2=\frac{4}{EJ}.$$

Cuando el peso está dispuesto en el primer tramo:

$$\delta_{1P}=(M_P^0)\cdot(\overline{M}_1)=\frac{-z(12-z)}{2}\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{(24-z)}{2EJ},$$

$$\delta_{2P}=(M_P^0)\cdot(\overline{M}_2)=-\frac{z(12-z)}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}(12+z)\,\frac{1}{2EJ},$$

o

$$EJ\delta_{1P}=-f_1(z);\quad EJ\delta_{2P}=f_2(z),$$

donde $f_1(z)=\dfrac{z(12-z)(24-z)}{24}$; $f_2(z)=\dfrac{z(144-z^2)}{144}$.

Las ecuaciones canónicas con sus coeficientes numéricos son:

$$\begin{cases}288X_1-12X_2+EJ\delta_{1P}=0;\\ -12X_1+4X_2+EJ\delta_{2P}=0.\end{cases}$$

Presentemos las ecuaciones de las líneas de influencia, por (14.75), así:

$$\begin{aligned}&\text{l.i. de } X_1=\beta_{11}EJ\delta_{1P}+\beta_{12}EJ\delta_{2P};\\ &\text{l.i. de } X_2=\beta_{21}EJ\delta_{1P}+\beta_{22}EJ\delta_{2P}.\end{aligned}\qquad(a)$$

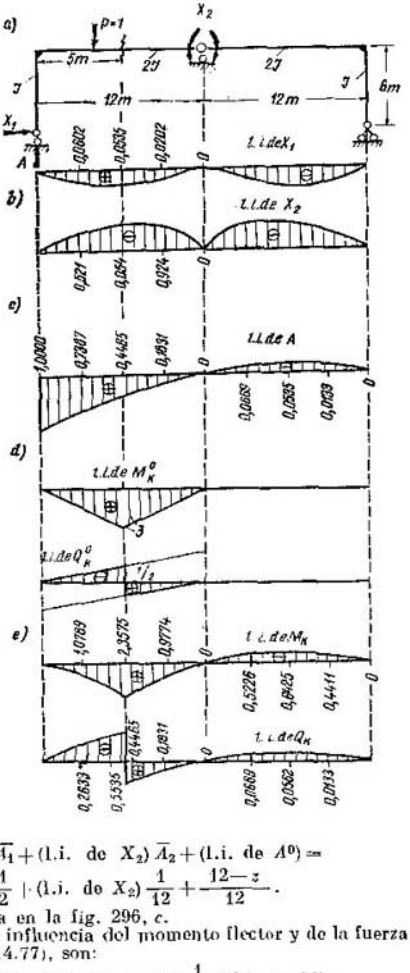
Los coeficientes de influencia pueden ser determinados por (14.49):

$$D=\begin{vmatrix}288&-12\\-12&4\end{vmatrix}=1\,008;\ \beta_{11}=(-1)^{(1+1)}\frac{4}{1\,008}=\frac{4}{1\,008};$$

$$\beta_{12}=\beta_{21}=(-1)^{(2+1)}\frac{(-12)}{1\,008}=\frac{12}{1\,008};$$

$$\beta_{22}=(-1)^{(2+2)}\frac{288}{1\,008}=\frac{288}{1\,008}.$$

Fig. 296



Los verificamos por (14.47)

$$-\frac{4}{1\,008}\,288-$$

$$-\frac{12}{1\,008}(-12)+1=0,$$

$$-\frac{12}{1\,008}(-12)-\frac{288\cdot 4}{1\,008}+1=0.$$

Cuando el peso está en el primer tramo, las ecuaciones de las líneas de influencia son:

$$\left.\begin{aligned}&\text{l.i. de } X_1=\\&=\frac{4}{1\,008}f_1(z)-\frac{12}{1\,008}f_2(z),\\&\text{l.i. de } X_2=\\&=\frac{12}{1\,008}f_1(z)-\frac{288}{1\,008}f_2(z).\end{aligned}\right\}\quad\text{(b)}$$

Por la condición de simetría podemos decir que con estas mismas ecuaciones se determinan las líneas de influencia en el segundo tramo, siendo solamente necesario, contar la abscisa z a partir del apoyo derecho.

Las líneas de influencia X_1 y X_2 representadas en la fig. 296, *a*, *b*, han sido calculadas por las ecuaciones (b).

Construimos la línea de influencia de la composición vertical de la reacción de apoyo izquierda A.

Por (14.77) tenemos que

$$\text{l.i. de } A=(\text{l.i. de } X_1)\,\overline{A}_1+(\text{l.i. de } X_2)\,\overline{A}_2+(\text{l.i. de } A^0)=$$

$$=(\text{l.i. de } X_1)\,\frac{1}{2}+(\text{l.i. de } X_2)\,\frac{1}{12}+\frac{12-z}{12}.$$

La línea de influencia de A se da en la fig. 296, *c*.

Las ecuaciones de la línea de influencia del momento flector y de la fuerza transversal en la sección k, por (14.77), son:

$$\text{l.i. de } M_k=(\text{l.i. de } X_1)(-3)+(\text{l.i. de } X_2)\,\frac{1}{2}+\text{l.i. de } M_k^0;$$

$$\text{l.i. de } Q_k=(\text{l.i. de } X_1)\,\frac{1}{2}+(\text{l.i. de } X_2)\,\frac{1}{12}+\text{l.i. de } Q_k^0.$$

Las líneas de influencia de M_k^0 y Q_k^0 en el sistema básico, están expuestas en la fig. 296, *c* y, en el sistema dado, en la fig. 296, *e*.

§ 138. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA. En los sistemas hiperestáticos, las líneas de influencia se construyen por el método cinemático sobre la base de las mismas ideas que en los sistemas isostáticos. Se elimina del sistema aquel vínculo, la línea de influencia de cuya reacción se determina y su eliminación se compensa con la aplicación de la reacción buscada. Luego, se investiga el sistema transformado bajo la acción del peso $P = 1$, por el principio de los desplazamientos posibles.

En los sistemas isostáticos, que después de la eliminación de un vínculo se transformaban en sistemas monovariantes, los posibles desplazamientos no iban acompañados con deformaciones del sistema.

En los sistemas hiperestáticos, que después de la eliminación de un vínculo quedan invariantes, los desplazamientos, sin deformaciones del sistema, son imposibles. Por eso es que, en ellos, los desplazamientos posibles pueden ser solamente desplazamientos acompañados con deformaciones del sistema. En estos desplazamientos realizarán trabajo, no sólo la fuerza externa $P = 1$ y las reacciones del vínculo eliminado sino, también, las fuerzas internas. En los sistemas isostáticos, al eliminar un vínculo el desplazamiento era único. En los sistemas hiperestáticos, desplazamientos posibles, acompañados con deformaciones del sistema, pueden haber tantos como se quiera.

No obstante, para conservar la analogía con los sistemas isostáticos, de la gran variedad de desplazamientos posibles, examinaremos solamente los *desplazamientos elásticos, por la dirección del vínculo eliminado, debidos a la reacción unitaria.*

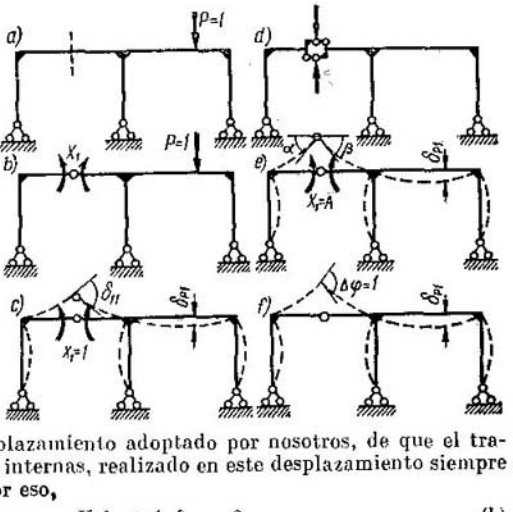
Por ejemplo, durante la construcción de la línea de influencia del momento flector en la sección dada del pórtico de la fig. 297, introducimos una articulación en dicha sección y compensamos su introducción con los momentos incógnitos X_1 (fig. 297, *b*). La ecuación de los trabajos de las fuerzas externas e internas del estado real en los desplazamientos debidos a la reacción unitaria del vínculo eliminado, es

$$X_1\delta_{11} + 1 \cdot \delta_{P1} = \sum \int M_P \frac{\overline{M}_1}{EJ}\, ds + \sum \int N_P \frac{\overline{N}_1}{EJ}\, ds + \\ + \sum \int \mu Q_P \frac{\overline{Q}_1}{GF}\, ds, \qquad \text{(a)}$$

donde M_P, N_P y Q_P son las fuerzas internas en el estado real (fig. 297, *a*, *b*) y $\overline{M}_1$, $\overline{N}_1$ y $\overline{Q}_1$, en el estado unitario (fig. 297, *c*).

El segundo miembro de la expresión (a), según la fórmula general de los desplazamientos, determina, a la derecha y a la izquierda de la articulación, el ángulo de giro recíproco de las secciones debido a $P = 1$, pero, dado que él es igual a cero, el segundo miembro (a), también, es igual a cero. Precisamente, en esto consiste el sentido

Fig. 297



particular del desplazamiento adoptado por nosotros, de que el trabajo de las fuerzas internas, realizado en este desplazamiento siempre es igual a cero. Por eso,

$$X_1\delta_{11} + 1 \cdot \delta_{P1} = 0. \qquad \text{(b)}$$

La igualdad (b) se puede obtener, más simplemente, del teorema de la reciprocidad de los trabajos aplicado en la fig. 297 para los estados *b* y *c*, pero, entonces, desaparece la generalización de la exposición del método cinemático de construcción de las líneas de influencia en los sistemas estáticos e hiperestáticos.

De la igualdad (b) obtenemos que

$$\text{l.i. de } X_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}}, \qquad (14.78)$$

es decir, llegamos a la misma expresión que para los sistemas isostáticos. Esto significa que el *diagrama de los desplazamientos verticales de la línea de carga, debidos a una fuerza unitaria por la dirección del vínculo excluido, determina la forma de la línea de influencia de la reacción de dicho vínculo excluido.* Para la obtención de la propia línea de influencia es necesario dividir el diagrama de desplazamientos de la línea de carga por δ_{11} y cambiarle el signo, como se hace para los sistemas isostáticos, por el contrario.

La regla expuesta, igual que para los sistemas isostáticos, es particularmente efectiva al determinar la forma de la línea de influencia, dado que la forma del diagrama de desplazamientos de la línea de carga, en muchos casos, puede ser claramente representada. Para la construcción de la línea de influencia es necesario calcular el sistema hiperestático, bajo la carga debida a la fuerza $X_1 = 1$, con el grado de indeterminación estática en una unidad menor que el dado y, luego, construir el diagrama de los desplazamientos δ_{P1}.

Si se exigiera, aún, construir otra línea de influencia cualquiera, por ejemplo, la l.i. de la fuerza transversal en la misma sección, entonces, se debe excluir otro vínculo y emplear otro diagrama de desplazamientos (fig. 297, *d*). Esto significa que para construir la línea de influencia de Q no puede ser utilizado el mismo sistema básico que se empleó, anteriormente, para construir la l.i. de M. Esta es la desventaja del método cinemático al construir un gran número de distintas líneas de influencia. Por eso es que el método cinemático de construcción de las l.i. debe considerarse, ante todo, como a un método que permite representarnos figuradamente la forma (el modelo) de las líneas de influencia. En este sentido, para los fines de control, el método cinemático es insustituible.

La insuficiencia señalada del método cinemático en el caso de múltiples construcciones de diferentes líneas de influencia, que consiste en que para cada línea de influencia, se emplea un sistema básico particular en el que se determina δ_{p1} debido a $X_1 = 1$, puede ser eliminada de la siguiente manera. Vamos a variar la magnitud de la fuerza X_1 en la fig. 297, *c*. Debido a tal variación se modificarán el numerador y el denominador de (14.78), permaneciendo constante el valor del quebrado. Variemos la magnitud de X_1 hasta el valor $X_1 = A$, para el cual, el denominador de (14.78) se reduce a la unidad.

Entonces $X_1 = -\overline{\delta}_{p1}$. El diagrama de $\overline{\delta}_{p1}$ (fig. 297, *e*) puede ser examinado como el diagrama de los desplazamientos debido a una dislocación obligatoria, en una unidad, por la dirección del vínculo eliminado. Esto significa que el *diagrama de los desplazamientos verticales de la línea de carga debidos a la dislocación obligatoria en el sistema con un vínculo eliminado, por su dirección, igual a la unidad, es la línea de influencia de la reacción del vínculo eliminado, con el signo contrario.*

El diagrama de los desplazamientos δ_{p1} debidos a $X_1 = A$, evidentemente, no cambia, si después del desplazamiento del sistema se cierra la articulación (fig. 297, *f*). Después de esto, en el sistema no habrán fuerzas externas, sino, solamente, el desplazamiento obligado del sistema dado $\Delta\varphi = 1$, por la dirección del vínculo anteriormente eliminado. Así será, para una dislocación obligada, por la dirección de cualquier vínculo en el sistema dado. Por consiguiente, la parte general del cálculo, ligada con la obtención de los coeficientes de influencia β_{ik}, puede ser ejecutada para cualquier sistema básico, uno para todas las líneas de influencia, obtenido del sistema dado. Pero tal sistema básico general tendrá una incógnita más, que el básico particular, para cada línea de influencia.

Si el sistema es sólo monohiperestático, entonces, la eliminación de cualquier vínculo lo convierte en isostático y, en este caso, no tiene sentido utilizar, en el sistema dado, los desplazamientos obligados, por cuanto la variedad de los sistemas isostáticos no puede ser una gran dificultad para la construcción del diagrama de δ_{p1}.

§ 139. CALCULO DE PORTICOS COMPLEJOS. Al calcular pórticos complejos, es particularmente importante la eliminación del mayor número posible de desplazamientos secundarios. Junto con los procedimientos de la eliminación de dichos desplazamientos, señalados anteriormente, por medio del traslado de las incógnitas, el agrupamiento de diagramas y la utilización de la simetría, se pueden indicar, también, algunos procedim entos de elección de los sistemas

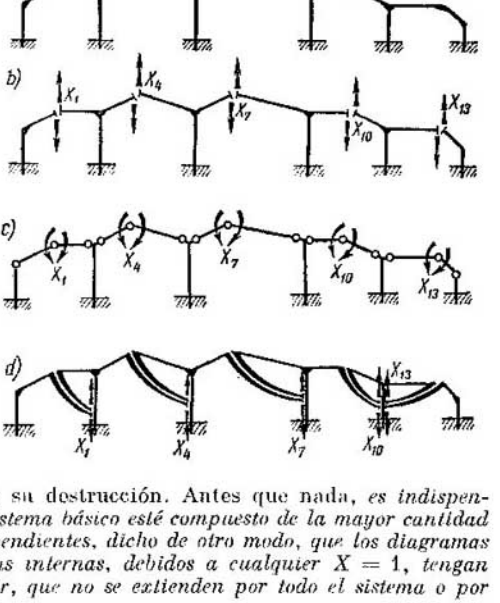


Fig. 298

básicos, que facilitan su destrucción. Antes que nada, *es indispensable tender a que el sistema básico esté compuesto de la mayor cantidad posible de partes independientes, dicho de otro modo, que los diagramas unitarios de las fuerzas internas, debidos a cualquier* $X = 1$, *tengan carácter local, es decir, que no se extienden por todo el sistema o por la mayoría de sus partes.*

En tales casos, en el pórtico, los diagramas unitarios sueltos no se superpondrán y algunos desplazamientos secundarios se reducirán a cero. Por ejemplo, en un pórtico de varios tramos y un piso (fig. 298, *a*), tal sistema básico puede ser obtenido con el seccionamiento de vigas de armadura (fig. 298, *b*) o la introducción de articulaciones (fig. 298, *c*). La deformación del sistema básico, debida a cualquier $X = 1$, ocurre dentro de los límites del contorno del tramo dado. Por esta razón los desplazamientos tendrán lugar sólo en tres tramos: en aquél donde está aplicada la fuerza $X_k = 1$ y en los contiguos de su derecha e izquierda. En el sistema básico de la fig. 298, *b*, los desplazamientos secundarios $\delta_{71}, \ldots, \delta_{15,1}$, debidos

a $X_1 = 1$, son iguales a cero. Además, conviene utilizar el traslado de fuerzas y el agrupamiento de diagramas unitarios, lo cual reduce a cero a unos cuantos desplazamientos secundarios más. Complementariamente, en la fig. 298, *d*, se reducen a cero los desplazamientos δ_{41}, δ_{51}, δ_{81} y otros.

Al hacer los cálculos de un pórtico de un tramo y varios pisos (fig. 299, *a*) y de un pórtico simétrico de varios tramos y dos pisos

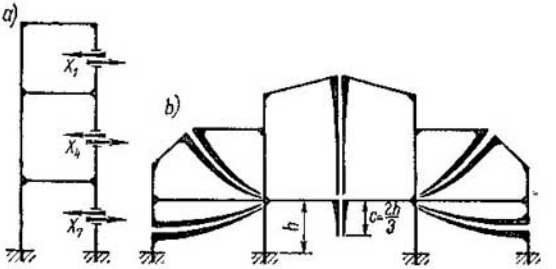


Fig. 299

(fig. 299, *b*), el sistema básico se elige análogamente. En un pórtico simétrico es indispensable emplear incógnitas pares.

No se debe pensar que los sistemas básicos señalados son los mejores. Estos ejemplos muestran sólo los procedimientos de obtensión de sistemas básicos cómodos.

§ 140. CALCULO DE PORTICOS BAJO VARIAS CARGAS ACCIDENTALES. En la práctica de los cálculos de pórticos, como norma, nos vemos obligados a efectuar su cálculo bajo varios tipos, o distintas disposiciones, de cargas accidentales que pueden actuar sobre la construcción, tanto simultáneamente, como por separado. En estos casos surge la cuestión de elegir la combinación de éstas, en cada sección transversal del pórtico, menos favorable para la resistencia del material.

Si para las cargas teóricas, el material se halla en estado elástico y el diagrama de tensiones normales es rectilíneo por toda la sección, entonces, la combinación de cargas más desfavorable se determina, corrientemente, por las mayores tensiones de borde. En este caso, si el material ofrece igual resistencia a la tracción y a la compresión, entonces, por la mayor tensión de borde en valor absoluto, pero, si la resistencia del material a la tracción y a la compresión es distinta, entonces, por una de las mayores tensiones de borde en valor absoluto, menos favorable para la resistencia del material.

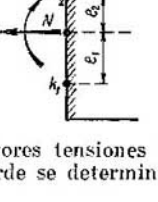
La cuestión sobre los mayores valores de las tensiones de borde puede ser resuelta, de modo más completo y exacto, por medio de sus líneas de influencia o las de los momentos nucleares. Estas líneas de influencia son combinaciones lineales de las de M y N, según

las fórmulas (fig. 300):

$$\left.\begin{aligned} &\text{l.i. de } \sigma = \pm \frac{\text{l.i. de } N}{F} \pm \frac{\text{l.i. de } M}{W}\ ; \\ &\text{l.i. de } M_{k_1}^{\text{nucl}} = \text{l.i. de } M - (\text{l.i. de } N)\, e_1; \\ &\text{l.i. de } M_{k_2}^{\text{nucl}} = \text{l.i. de } M + (\text{l.i. de } N)\, e_2; \end{aligned}\right\} \qquad (14.79)$$

Sin embargo, tal vía resulta complicada. Frecuentemente, la mayoría se limita a calcular los pórticos bajo cada carga accidental

Fig. 300



teórica por separado, eligiendo de ellas las mayores tensiones de borde que presentan interés. Las tensiones de borde se determinan por las expresiones:

$$+\sigma_{\text{cálc}} = \sigma_q + \sum (+\sigma_d), \qquad -\sigma_{\text{cálc}} = \sigma_q + \sum (-\sigma_d), \quad (14.80)$$

donde: σ_q es el valor algebraico de la tensión debida a la carga constante;

$+\sigma_d$ son las tensiones positivas debidas a las diferentes cargas de cálculo accidentales;

$-\sigma_d$ las tensiones negativas debidas a estas mismas cargas.

Se puede proceder de otra manera, o sea: construir los diagramas envolventes de los momentos nucleares debidos a las cargas accidentales de cálculo. Para esto, al principio, es necesario construir los diagramas de los momentos nucleares por los diagramas de M y N, empleando las expresiones (14.79)

$$(M_{k_1}^{\text{nucl}}) = (M) - (N)\, e_1; \quad (M_{k_2}^{\text{nucl}}) = (M) + (N)\, e_2.$$

A continuación se deben construir los diagramas envolventes de los momentos nucleares por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} &+M_{\text{cálc}}^{\text{nucl}} = M_q^{\text{nucl}} + \sum (+M_d^{\text{nucl}}); \\ &-M_{\text{cálc}}^{\text{nucl}} = M_q^{\text{nucl}} + \sum (-M_d^{\text{nucl}}), \end{aligned}\right\} \qquad (14.81)$$

donde: M_q^{nucl} es el momento nuclear debido a la carga constante, con su signo;

$+M_d^{nucl}$ son los momentos nucleares positivos debidos a las diferentes cargas de cálculo accidentales;

$-M_d^{nucl}$ los momentos nucleares negativos debidos a estas mismas cargas.

§ 141. CONCLUSIONES SOBRE EL CALCULO DE PORTICOS. Como norma, algunos elementos de los sistemas de pórticos trabajan a la flexocompresión o flexotracción, o sea, se encuentran en condiciones de flexión axiotransversal. Como es sabido, en estado de deformación, en el caso de flexión axiotransversal, teniendo en cuenta la influencia de las fuerzas longitudinales sobre los momentos flectores y si también la fuerza longitudinal varía junto con la carga, las fuerzas internas, las tensiones y los desplazamientos no son proporcionales a las cargas. Esto es, justamente, lo que tiene lugar al calcular pórticos hiperestáticos. En el caso de flexocompresión, las fuerzas internas, las tensiones y los desplazamientos, crecen con más rapidez que las cargas y, en el caso de flexotracción, con más lentitud.

Por cuanto, para determinadas condiciones, las fuerzas longitudinales comprimentes influyen considerablemente sobre el estado deformado del sistema, aumentando los desplazamientos transversales, el cálculo de los pórticos se debería hacer por el esquema de deformación. Pero tal cálculo resulta complicado, dado que aquí no es utilizable el principio de independencia de acción de las fuerzas.

Las ecuaciones de los desplazamientos (13.1) ya no pueden ser desarrolladas en una forma tan cómoda de las ecuaciones canónicas (14.5).

Por eso, durante el cálculo de pórticos, con el fin de simplificar el cálculo, corrientemente se desprecia la influencia de las fuerzas longitudinales sobre la flexión transversal y se emplea el cálculo usual, tal como fue expuesto, con el empleo del principio de independencia de acción de las fuerzas y las ecuaciones canónicas que se desprenden de él (14.5).

Por consiguiente, tal cálculo no es exacto y, como norma, el error no entra en el margen de resistencia, cosa *que no se debe olvidar*. El grado de exactitud de tal cálculo, por lo visto, depende de en cuanto las fuerzas longitudinales comprimentes, en las barras del pórtico, se diferencian de sus valores críticos.

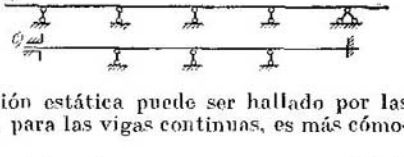
Durante la determinación de los desplazamientos, a fines de simplificar el cálculo, corrientemente, se desprecian las deformaciones debidas a la tracción o compresión y al desplazamiento en comparación con las debidas a la flexión, es decir, en la fórmula general de los desplazamientos, se desprecian las fuerzas N y Q. Frecuentemente, pero no siempre, habiendo flexión, la influencia de estas fuerzas es pequeña. En los casos, cuando en la fórmula de los desplazamientos los sumandos que contienen fuerzas longitudinales y transversales dan magnitudes equiparables a los sumandos con momentos flectores, ya no es posible despreciar estos sumandos y deben considerarse.

Por ejemplo, en las armaduras con nudos rígidos y en los tirantes se deben tener en cuenta, obligatoriamente, las fuerzas longitudinales N.

CAPITULO XV * CALCULO DE VIGAS CONTINUAS POR EL METODO DE FUERZAS

§ 142. NOCIONES GENERALES. Se llama *continua* a la viga hiperestática de alma llena, y con más de dos apoyos y que, por consiguiente, cubre no menos de dos tramos (fig. 301). Si los extremos de la viga descansan sobre apoyos articulados, ésta se llama *continua simple* (fig. 301, *a*); si tiene voladizos (fig. 301, *b*), *continua voladiza* o saledíza y, por fin, si en los extremos tiene empotramientos (fig. 301, *c*), *continua con uno o dos empotramientos.*

Fig. 301



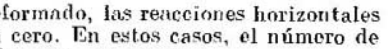
El grado de indeterminación estática puede ser hallado por las reglas generales. Sin embargo, para las vigas continuas, es más cómoda la fórmula especial

$$n = V_{ap} - 3, \tag{15.1}$$

donde, V_{ap} es el número de vínculos de apoyo (no de apoyos).

Si la viga posee más de un apoyo fijo, entonces, para carga vertical y momentos externos concentrados, cuando las fuerzas internas

Fig. 302



se determinan por el estado indeformado, las reacciones horizontales de los apoyos fijos son iguales a cero. En estos casos, el número de incógnitas básicas, diferentes de cero, es igual a:

$$n^* = A_{int} + E < n, \tag{15.2}$$

donde: A_{int} es la cantidad de apoyos intermedios articulados (no de vínculos) y E, el número de empotramientos fijos o rodantes en los extremos de la viga.

La fórmula (15.1) da el número de incógnitas diferentes de cero, en el caso de carga vertical y momentos concentrados, sólo en caso de que la viga tenga un apoyo articulado o, un empotramiento fijo con los restantes apoyos y el segundo empotramiento rodantes.

Si introducimos articulaciones en la viga (fig. 302), entonces, cada una de éstas disminuye el grado de indeterminación en una unidad.

§ 143. SISTEMA BASICO. El sistema básico para la viga continua expuesta en la fig. 303, *a*, puede ser obtenido eliminando todos los vínculos intermedios y tomando en calidad de incógnitas básicas las reacciones de apoyo (fig. 303, *b*) o, introduciendo articulaciones sobre los apoyos y adoptando como incógnitas básicas los momentos flectores de apoyo (fig. 303, *c*).

Convengamos en numerar los tramos de la viga dada de izquierda a derecha. Al apoyo derecho de cada tramo y al momento de apoyo incógnito, sobre él, los designaremos con la letra M y los índices de este tramo.

No es difícil convencerse de que, en el primer sistema básico, cualquier fuerza $X_i = 1$ origina desplazamientos por la dirección

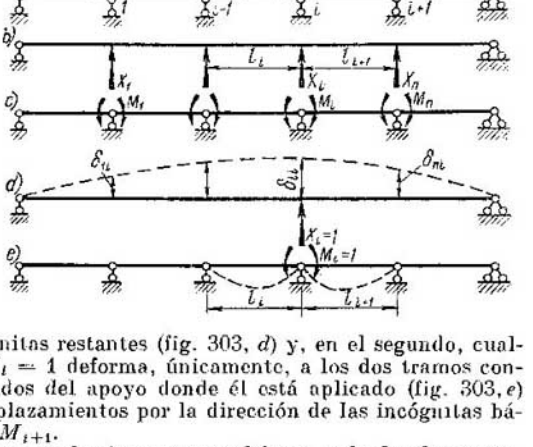


Fig. 303

de todas las incógnitas restantes (fig. 303, *d*) y, en el segundo, cualquier momento $M_i = 1$ deforma, únicamente, a los dos tramos contiguos a ambos lados del apoyo donde él está aplicado (fig. 303, *e*) y sólo origina desplazamientos por la dirección de las incógnitas básicas M_{i-1}, M_i y M_{i+1}.

Por consiguiente, en el primer sistema básico, cada desplazamiento secundario no es igual a cero y las ecuaciones canónicas serán completas y, en el segundo, un gran número de desplazamientos secundarios son iguales a cero y las ecuaciones canónicas serán incompletas. Por cuanto el segundo sistema básico es más racional que el primero, entonces, precisamente él será examinado en adelante.

§ 144. ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. Examinemos dos tramos contiguos, el i-ésimo y el $(i + 1)$-ésimo del sistema básico (fig. 304, *a*). Escribamos la i-ésima ecuación canónica del método de fuerzas. No es difícil convencerse de que los momentos M_{i-2} y M_{i+2} no deforman los tramos examinados de la viga y, por consiguiente, no originan desplazamientos por la dirección del momento

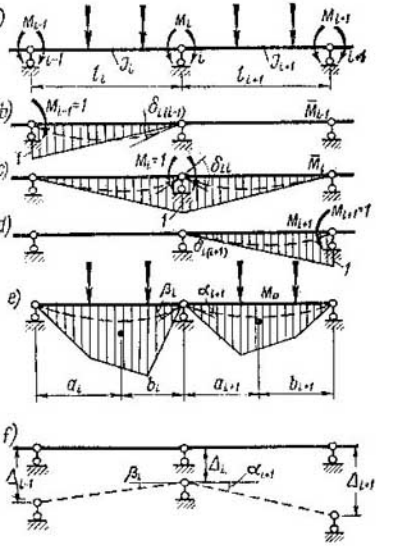


Fig. 304

M_i. Por eso, la ecuación canónica tiene la forma

$$\delta_{i(i-1)}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{i+1} + \Delta_{ip} = 0. \quad (15.3)$$

Los coeficientes de esta ecuación y el miembro libre representan los ángulos de giro recíprocos de la sección por la dirección de la acción del momento de apoyo M_i, la dirección positiva de los cuales coincide con la dirección positiva de este momento.

Supongamos que la viga posee una sección escalonada variable, con un momento de inercia constante en cada tramo. Al determinar los coeficientes y miembros libres despreciaremos las fuerzas transversales en la fórmula de los desplazamientos. En la fig. 304, *b*, *c*, *d*, *e*, se han construido los diagramas de los momentos imprescindibles para la determinación de los coeficientes y miembros libres.

Hallamos los coeficientes, multiplicando los diagramas unitarios:

$$\delta_{i(i-1)} = (\overline{M}_{i-1}) \cdot (\overline{M}_i) = \frac{l_i \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ_i} = \frac{l_i}{6EJ_i};$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\overline{M}_{i+1}) \cdot (\overline{M}_i) = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}};$$

$$\delta_{ii} = (\overline{M}_i) \cdot (\overline{M}_i) = \frac{l_i \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_i} + \frac{l_{i+1} \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_{i+1}} = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}.$$

Ahora, la ecuación canónica toma la forma

$$\frac{l_i}{6EJ_{i+1}} M_{i-1} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \right) M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} M_{i+1} + \Delta_{ip} = 0.$$

Multiplicándola por el valor **arbitrario** $6EJ_0$ obtenemos, definitivamente, que

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6EJ_0 \Delta_{iP} = 0, \quad (15.4)$$

donde $\lambda_i = l_i \frac{J_0}{J_i}$ es la longitud reducida del i-ésimo tramo.

La ecuación canónica (15.4) se llama ecuación de los tres momentos, por cuanto ella liga a tres momentos incógnitos de apoyo sucesivos.

Hallemos, ahora, el miembro libre.

Acción de la carga. Multiplicando los diagramas de carga por el diagrama unitario $\overline{M_i}$ (fig. 304) obtenemos

$$\Delta_{iP} = \beta_i + \alpha_{i+1} = \frac{\omega_i a_i}{l_i E J_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} E J_{i+1}}, \quad (15.5)$$

donde: ω_i es el área del diagrama de carga de los momentos flectores en el i-ésimo tramo y, ω_{i+1}, en el $(i+1)$ — ésimo; a y b, son las distancias desde el centro de gravedad del diagrama hasta los apoyos izquierdo y derecho.

A veces, los miembros libres de la ecuación de los tres momentos se expresan por medio de las reacciones convencionales de apoyo en el sistema básico

$$\frac{\omega_i b_i}{l_i} = A_i^* \quad \text{y} \quad \frac{\omega_{i+1} a_{i+1}}{l_i} = B_i^*.$$

Dislocación de los apoyos o su distribución, cuando no se encuentran en una misma recta. La dislocación de los apoyos, en el sistema básico, se expone en la fig. 304, *e*.

De esta figura se desprende que

$$\Delta_{i\Delta} = \alpha_{i+1} + \beta_i = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i+1}} + \frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i}. \quad (15.6)$$

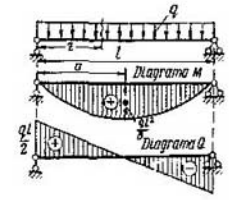
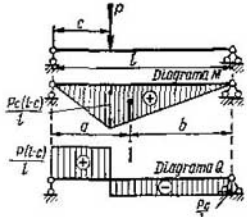
La ecuación de los tres momentos, después de transformar el miembro libre, toma la forma

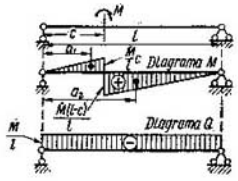
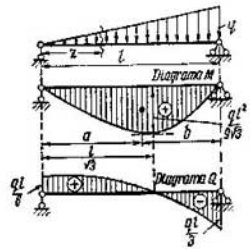
$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6\left(\frac{\omega_i a_i J_0}{l_i J_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1} J_0}{l_{i+1} J_{i+1}}\right) + 6EJ_0\left(\frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i+1}} + \frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i}\right) = 0. \quad (15.7)$$

Si la viga es de sección constante, entonces, se debe tomar $J_0 = J$. En este caso, las longitudes reducidas de los tramos son iguales a las dadas y la ecuación de los tres momentos se escribe así:

$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} + 6\left(\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}}\right) + 6EJ\left(\frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i+1}} + \frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i}\right) = 0. \quad (15.8)$$

Los valores de algunas magnitudes, indispensables para el cálculo de vigas continuas, se dan en la tabla 6.

Tipo de carga	Momento flector M	Fuerzas transversales Q	ω	a	b
	$M = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}$; $M_{l/2} = \frac{ql^2}{8}$; $M_{l/4} = \frac{3ql^2}{32}$	$Q = \frac{ql}{2} - qz$	$\frac{ql^3}{12}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$M_0 = 0$; $M_c = \frac{Pc(l-c)}{l}$; $M_l = 0$	$Q_0 = \frac{P(l-c)}{l}$; $Q_l = -\frac{Pc}{l}$	$\frac{Pc(l-c)}{2}$	$\frac{1}{3}(0+c+l) =$ $= \frac{1}{3}(l+c)$	$\frac{1}{3}(0+l+l-c) =$ $= \frac{1}{3}(2l-c)$

Tipo de carga	Momento flector M	Fuerzas transversales Q	ω	a	b
	$M_{c-dz} = -\frac{M}{l}\,c;$ $M_{c+dz} = \frac{M\,(l-c)}{l}$	$Q = -\frac{M}{l};$ $Q = -\frac{M}{l}$	$\omega_1 = -\frac{Mc^2}{2l};$ $\omega_2 = \frac{M\,(l-c)^2}{2l}$	$a_1 = \frac{2}{3}\,c;$ $a_2 = l - \frac{2}{3}\,(l-c)$	$b_1 = l - \frac{2}{3}\,c;$ $b_2 = \frac{2}{3}\,(l-c)$
	$M = \frac{ql}{6}z - \frac{qz^3}{6l};$ $M_0 = 0$ $M_{l:4} = \frac{15}{384}\,ql^2;$ $M_{l:2} = \frac{1}{16}\,ql^2;$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}};$ $M_{\frac{3}{4}l} = \frac{7}{128}\,ql^2;$ $M_l = 0$	$Q = \frac{ql}{6} - \frac{qz^2}{2};$ $Q_0 = \frac{ql}{6};$ $Q_{l:4} = \frac{13}{96}\,ql;$ $Q_{l:2} = \frac{1}{24}\,ql;$ $Q_{\frac{3}{4}l} = -\frac{11}{96}\,ql;$ $Q_l = -\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^3}{24}$	$\frac{8l}{15}$	$\frac{7l}{15}$

§ 145. PARTICULARIDADES DEL EMPLEO DE LA ECUACION DE LOS TRES MOMENTOS. El empleo de la ecuación de los tres momentos depende de las condiciones en los extremos de la viga.

Si la viga posee en los extremos apoyos articulados, entonces, en la ecuación de los tres momentos, el índice i toma, sucesivamente, los valores 1, 2, . . ., $m - 1$, donde m es el número del último tramo. En este caso, el número de ecuaciones es suficiente para la determinación de todas las incógnitas básicas. Si la viga posee voladizos (fig. 305, *a*), entonces, al principio, se pueden eliminar, sustituyendo su acción por fuerzas (fig. 305, *b*) y componiendo, luego, las ecuaciones de los tres momentos para una viga, cuyos extremos descansan sobre articulaciones.

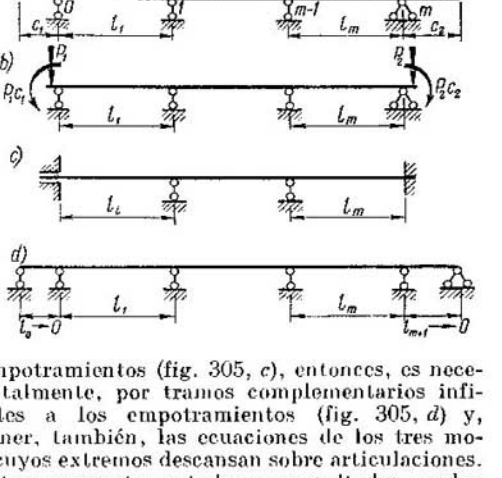


Fig. 305

Si la viga posee empotramientos (fig. 305, *c*), entonces, es necesario sustituirlos, mentalmente, por tramos complementarios infinitesimales equivalentes a los empotramientos (fig. 305, *d*) y, a continuación, componer, también, las ecuaciones de los tres momentos para una viga, cuyos extremos descansan sobre articulaciones.

La ecuación de los tres momentos y todos sus resultados pueden ser empleados, también, para el cálculo de vigas hiperestáticas de un tramo.

§ 146. EXPRESIONES DEL MOMENTO FLECTOR Y DE LA FUERZA TRANSVERSAL EN EL TRAMO DE UNA VIGA. Cada tramo de una viga continua puede ser examinado como una viga simplemente apoyada bajo la carga dada sobre este tramo y los momentos de apoyo hallados de las ecuaciones de los tres momentos. Las direcciones positivas de los momentos de apoyo se muestran en la fig. 306.

El momento flector en cualquier sección puede escribirse por la fórmula (14.19)

$$M_z = M_z^{\text{vig}} + \frac{M_{i-1}}{l_i}(l_i - z) + \frac{M_i}{l_i} z, \qquad (15.9)$$

donde M_z^{vig} es el momento de una viga simplemente apoyada debido a la carga dada.

Hallamos la fuerza transversal diferenciando la expresión del momento flector

$$Q_z = \frac{dM_z}{dz} = Q_z^{\text{vig}} + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}, \qquad (15.10)$$

donde Q_z^{vig} es la fuerza transversal en una viga simplemente apoyada, debida a la carga dada.

Fig. 306

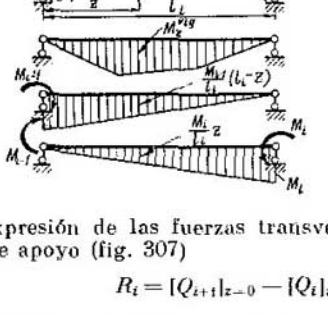
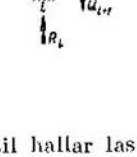


Fig. 307



De la expresión de las fuerzas transversales es fácil hallar las reacciones de apoyo (fig. 307)

$$R_i = [Q_{i+1}]_{z=0} - [Q_i]_{z=l_i}. \qquad (15.11)$$

Ejemplo 37. Construir el diagrama de los momentos flectores en la viga continua de la fig. 308, *a*. Seccionamos el voladizo izquierdo y sustituimos el empotramiento por el tramo infinitesimal $l_0 \to 0$ (fig. 308, *b*). Adoptamos $J_0 = J$. Las longitudes reducidas de los tramos son:

$$\lambda_1 = l_1 = 10 \text{ m}; \quad \lambda_2 = \frac{8J}{0{,}8J} = 10 \text{ m}.$$

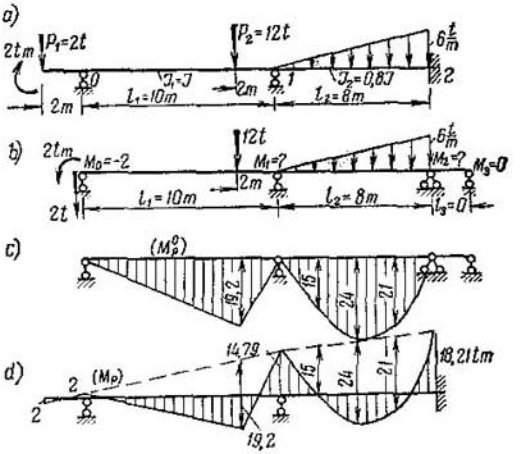
Las ecuaciones de los tres momentos son:

$$\lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J\left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1 J} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 0{,}8J}\right) = 0;$$

$$\lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3) M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J\left(\frac{\omega_2 a_2}{l_2 0{,}8J} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 J}\right) = 0.$$

Los diagramas de los momentos flectores en una viga simplemente apoyada están representados en la fig. 308, *c*.

Fig. 308



Hallamos que:

$$\omega_1 = \frac{12 \cdot 8\,(10-8)}{2} = 96\ \text{m}^2;$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\,(0+8+10) = 6\ \text{m};$$

$$b_1 = \frac{1}{3}\,(0+10+2) = 4\ \text{m}.$$

$$\omega_2 = \frac{ql^3}{24} = \frac{6 \cdot 8^3}{24} = 128\ \text{tfm}^2;$$

$$a_2 = \frac{8}{15}\,8 = \frac{64}{15}\ \text{m};$$

$$b_2 = \frac{7}{15}\,8 = \frac{56}{15}\ \text{m}.$$

Ahora podemos escribir las ecuaciones de los tres momentos, con los coeficientes numéricos, para $M_0 = -2$ tfm.

$$-10 \cdot 2 + 2\,(10+10)\,M_1 + 10M_2 + 6\left(\frac{96 \cdot 6}{10} + \frac{128\,\frac{56}{15}}{8 \cdot 0{,}8}\right) = 0;$$

$$10M_1 + 2\,(10+0)\,M_2 + 0 + 6\left(\frac{128\,\frac{64}{15}}{8 \cdot 0{,}8}\right) = 0.$$

o

$$40M_1 + 10M_2 + 6\,(57{,}6 + 74{,}67) - 20 = 0;$$

$$10M_1 + 20M_2 + 6\,(85{,}33 + 0) = 0,$$

de donde obtenemos que

$$M_2 = -18{,}205\ \text{tfm}, \qquad M_1 = -14{,}789\ \text{tfm}.$$

Efectuamos la construcción del diagrama de momentos flectores por la fórmula (14.18). Al principio, trazamos en cada tramo una línea punteada que represente al diagrama de los momentos flectores debidos a los momentos de apoyo hallados (fig. 308, *d*) y, luego, a esta recta le «colgamos» el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga dada en este tramo, como en una viga sobre dos apoyos.

§ 147. METODO DE LOS PUNTOS FOCALES DE LOS MOMENTOS. Representémonos una viga continua de varios tramos, cargada en todos o en algunos de los tramos situados a la derecha del examinado (fig. 309, *a*).

Seccionemos la viga a la distancia dz, a la derecha del i-ésimo apoyo, y sustituyamos la acción de la parte derecha eliminada sobre la izquierda que queda, por la fuerza transversal $Q_{i\,i+1\,0}$ y el momento flector M_i (fig. 309, *b*). Los momentos flectores sobre todos los tramos izquierdos los origina sólo el momento M_i, y la fuerza transversal $Q_{i\,i+1,\,0}$ es recibida por el i-ésimo apoyo extremo sin originar flexión.

El diagrama de los momentos flectores en los tramos izquierdos está representado en la fig. 309, *b*. En cada tramo izquierdo el diagrama de momentos flectores corta a la viga en un punto determinado, señalado en la figura con una estrellita. La posición de estos puntos no depende de la magnitud del momento M_i y, por consiguiente, tampoco de la carga de cualesquiera de los otros tramos a la derecha del i-ésimo tramo. A tales puntos se los denomina *puntos focales izquierdos* o focos de momento izquierdos, por cuanto en ellos, al cargar todos o algunos de los tramos de la viga continua *a la derecha* del examinado, los momentos flectores son iguales a cero. Al cargar todos o algunos de los tramos de la viga continua *a la izquierda* del examinado, los *puntos focales derechos* se determinan análogamente.

Así pues, cada tramo de viga continua posee dos focos de momento, el izquierdo y el derecho (fig. 309, *c*), la posición de los cuales no depende de la carga, sino, solamente, de las dimensiones y rigidez de la viga. *El punto focal izquierdo es el punto, en el cual, si la carga está ubicada a la derecha del tramo examinado, el momento flector es igual a cero y, el punto focal derecho es el punto, en el cual, si la carga está ubicada a la izquierda del tramo examinado, el momento flector es igual a cero.* En tales casos, en los focos la línea elástica tiene el punto de inflexión. Las relaciones entre el mayor, en valor absoluto, momento de apoyo del tramo no cargado y el menor, tomadas con el signo contrario, se llaman *relaciones focales.*

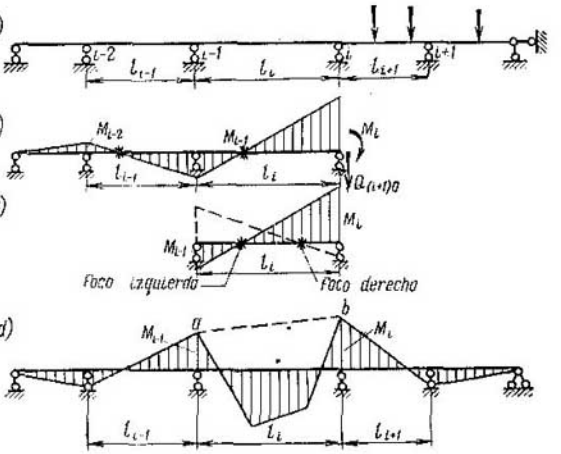
Relación focal izquierda

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}. \qquad (15.12)$$

Relación focal derecha

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}. \qquad (15.13)$$

Fig. 309



Las relaciones focales permiten establecer con medios simples la posición de los focos y determinar uno de los momentos de apoyo si es conocido el otro.

Representemos ahora una viga cargada sólo en un tramo (fig. 309, *d*). Supongamos que se conocen los momentos de apoyo de este tramo cargado y las relaciones focales para toda la viga. Entonces, los momentos de apoyo de los tramos izquierdos y derechos no cargados se determinan por las expresiones:

para los tramos izquierdos no cargados

$$M_{izq} = -\frac{M_{der}}{k}; \qquad (15.14)$$

para los tramos derechos no cargados

$$M_{der} = -\frac{M_{izq}}{k'}, \qquad (15.15)$$

donde M_{izq} y M_{der} son los momentos izquierdo y derecho del tramo no cargado.

Por cuanto en los tramos no cargados de la viga el diagrama de momentos es rectilíneo, entonces él, en cada tramo, se construye por los momentos de apoyo calculados.

El *i*-ésimo tramo cargado se puede examinar como una viga simple, de doble apoyo, bajo la carga dada y los momentos de apoyo M_{i-1} y M_i. Por eso, al construir los diagramas de momentos en este tramo, es necesario «colgarla» (aplicarle) a la línea punteada de los momentos de apoyo el diagrama de los momentos de la viga simplemente apoyada, debidos a la carga dada. Si la viga se calcula cargada en varios tramos, entonces, es indispensable examinar la carga

de cada tramo por separado y, luego, sobre la base del principio de independencia de acción de las fuerzas, sumar todos los diagramas.

Como se ve de lo dicho, para el cálculo por el método de los focos, es necesario conocer las relaciones focales y el valor de los momentos de apoyo del tramo cargado.

1. DETERMINACIÓN DE LAS RELACIONES FOCALES

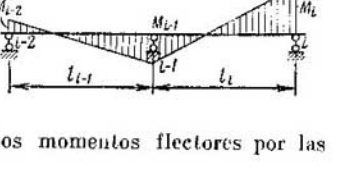
Examinemos dos tramos adyacentes i e $i-1$, suponiendo que la carga está aplicada a la derecha de éstos (fig. 310). Escribamos para estos tramos la ecuación de los tres momentos

$$\lambda_{i-1}M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i = 0.$$

Dividiéndola por M_{i-1}, hallamos, que

$$\lambda_{i-1}\frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) + \lambda_i \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0.$$

Fig. 310



Sustituyendo las relaciones de los momentos flectores por las relaciones focales, obtenemos

$$-\frac{\lambda_{i-1}}{k_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) - k_i\lambda_i = 0.$$

De donde obtenemos la fórmula de la relación focal siguiente, expresada por medio de la anterior

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right). \qquad (15.16)$$

Análogamente, la fórmula para las relaciones focales derechas tiene la forma:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right). \qquad (15.17)$$

Para la determinación de las relaciones focales izquierdas es necesario conocer la relación focal izquierda del primer tramo y, para las derechas, la derecha del último.

Mostremos cómo determinarlas, según el tipo de los apoyos extremos.

Efectuaremos los razonamientos para las relaciones focales izquierdas del primer tramo y, los resultados, los empleamos también para las derechas del último. Si el apoyo izquierdo del primer tramo (fig. 311, *a*) es articulado, entonces, la relación focal izquierda será $k_1 = -\frac{M_1}{0} = \infty$. Si el apoyo izquierdo del primer tramo es un empotramiento (fig. 311, *b*), entonces, sustituyéndolo por un tramo

infinitesimal (fig. 311, *c*), tendremos que para él, $k_0 = \frac{M_0}{M_{-1}} = \infty$. Después de esto, por (15.16) hallamos que $k_1 = 2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 2$, dado que $\lambda_0 = 0$.

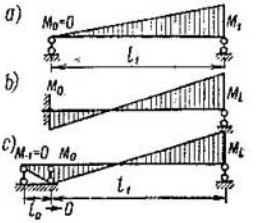


Fig. 311

Por consiguiente, *para un apoyo articulado en el extremo del primer (último) tramo, la relación focal izquierda (derecha) es igual al infinito, pero, para un empotramiento en él, la relación focal izquierda (derecha), es igual a dos.*

Cada tramo de viga continua puede ser examinado como elásticamente empotrado, es decir, que ocupa una posición intermedia entre una viga con apoyos articulados y otra con apoyos empotrados. Por esta razón las relaciones focales satisfacen a las desigualdades $2 \leqslant k \leqslant \infty$.

2. DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS FLECTORES DE UN TRAMO CARGADO (fig. 312)

Escribamos la ecuación de los tres momentos, al principio, para los tramos $i - 1$ e i y, luego, para los i e $i + 1$;

$$\lambda_{i-1}M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i + 6EJ_0\Delta_{(i-1)P} = 0;$$
$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + 6EJ_0\Delta_{iP} = 0.$$

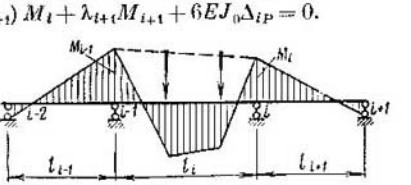


Fig. 312

En estas ecuaciones hay cuatro momentos de apoyo incógnitos: M_{i-2}, M_{i-1}, M_i y M_{i+1}. Por medio de las relaciones focales, dos de ellos, M_{i-2} y M_{i+1}, pueden ser expresados a través de los otros dos M_{i-1} y M_i:

$$\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}} = -k_{i-1};$$
$$\frac{M_i}{M_{i+1}} = -k'_{i+1}.$$

Después de esto, las ecuaciones adquieren la forma:

$$-\frac{\lambda_{i-1}}{k_{i-1}} M_{i-1} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) M_{i-1} - \lambda_i M_i + 6EJ_0 \Delta_{(i-1)P} = 0;$$

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i - \lambda_{i-1} \frac{M_i}{k'_{i-1}} + 6EJ_0 \Delta_{iP} = 0$$

o bien

$$M_{i-1}\left[2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right)\right] + M_i + 6EJ_0 \frac{\Delta_{(i-1)P}}{\lambda_i} = 0;$$

$$M_{i-1} + M_i\left[2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{k'_{i-1}}\right)\right] + 6EJ_0 \frac{\Delta_{iP}}{\lambda_i} = 0.$$

Tomando en consideración (15.16) y (15.17), tendremos definitivamente:

$$M_{i-1}k_i + M_i = -6EJ_0 \frac{\Delta_{(i-1)P}}{\lambda_i};$$

$$M_{i-1} + M_i k'_i = -6EJ_0 \frac{\Delta_{iP}}{\lambda_i}.$$

De aquí:

$$\left.\begin{aligned} M_{i-1} &= -\frac{6EJ_0}{\lambda_i} \cdot \frac{\Delta_{(i-1)P}k'_i - \Delta_{iP}}{k_i k'_i - 1}; \\ M_i &= -\frac{6EJ_0}{\lambda_i} \cdot \frac{\Delta_{iP}k_i - \Delta_{(i-1)P}}{k_i k'_i - 1}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.18)$$

Los desplazamientos Δ_{iP} y $\Delta_{(i-1)P}$ se expresan así:
a) habiendo carga, por (15.5),

$$\Delta_{(i-1)P} = \frac{\omega_i b_i}{l_i EJ_i}, \qquad \Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i}; \qquad (15.19)$$

b) en el caso de dislocamiento de los apoyos, por (15.6),

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{(i-1)\Delta} &= \frac{\Delta_i - \Delta_{i-1}}{l_i} \\ \Delta_{i\Delta} &= \frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.20)$$

Las fórmulas de los momentos de apoyo habiendo carga son:

$$\left.\begin{aligned} M_{i-1} &= -\frac{6\omega_i}{l_i^2} \cdot \frac{b_i k'_i - a_i}{k_i k'_i - 1}; \\ M_i &= -\frac{6\omega_i}{l_i^2} \cdot \frac{a_i k_i - b_i}{k_i k'_i - 1}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.21)$$

Si los apoyos extremos de una viga continua son articulados y, por consiguiente, las relaciones focales para los tramos extremos son iguales al infinito, entonces, una de las expresiones de (15.21) contendrá una indeterminación. Desarrollándola, obtenemos:

a) el momento de apoyo derecho del primer tramo

$$M_1 = -\frac{6\omega_1}{l_1^2} \cdot \frac{a_1}{k_1'}; \qquad (15.22)$$

b) el momento de apoyo izquierdo del último enésimo tramo

$$M_{n-1} = -\frac{6\omega_n}{l_n^2} \cdot \frac{b_n}{k_n}. \qquad (15.23)$$

Las fórmulas (15.21) — (15.23) son también válidas para las vigas de sección constante, varían sólo los valores de las relaciones focales (15.16) — (15.17):

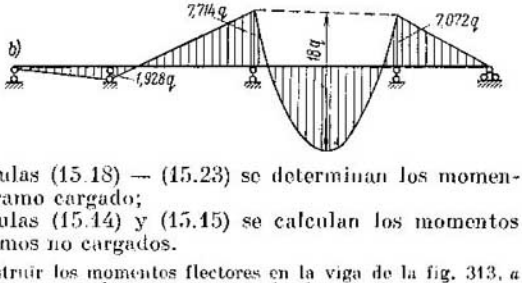
$$k_i = 2 + \frac{l_{i-1}}{l_i}\left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right); \qquad (15.24)$$

$$k_i' = 2 + \frac{l_{i+1}}{l_i}\left(2 - \frac{1}{k_{i+1}'}\right). \qquad (15.25)$$

De este modo, el cálculo deberá efectuarse en el siguiente orden:

1) por las fórmulas (15.16) y (15.17) o por las (15.24) — (15.25) se determinan las relaciones focales;

Fig. 313



2) por las fórmulas (15.18) — (15.23) se determinan los momentos de apoyo del tramo cargado;

3) por las fórmulas (15.14) y (15.15) se calculan los momentos de apoyo de los tramos no cargados.

Ejemplo 38. Construir los momentos flectores en la viga de la fig. 313, *a* por el método de los puntos focales. Para $J_0 = J$, las longitudes reducidas de los tramos son:

$$\lambda_1 = 8 \text{ m}, \quad \lambda_2 = \frac{12J}{1{,}5J} = 8 \text{ m},$$

$$\lambda_3 = 8 \text{ m}, \quad \lambda_4 = 8 \text{ m}.$$

Determinamos las relaciones focales por las fórmulas (15.16) y (15.17):

$$k_1 = \infty, \quad k_2 = 2 + \frac{8}{8}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4,$$

$$k_3 = 2 + \frac{8}{8}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4},$$

$$k_4 = 2 + \frac{8}{8}\left(2 - \frac{4}{15}\right) = \frac{56}{15}.$$

Las relaciones focales derechas se determinan de las condiciones de simetría:

$$k_1 = \frac{56}{15}, \quad k_2' = \frac{15}{4}, \quad k_3' = 4, \quad k_4' = \infty.$$

Los momentos de apoyo del tramo cargado se determinan por las fórmulas (15.21):

$$\omega_3 = \frac{ql^3}{12} = 144q; \quad a_3 = b_3 = 6 \text{ m};$$

$$M_2 = -\frac{6 \cdot 144q}{12^2} \cdot \frac{(6 \cdot 4 - 6)}{\frac{15}{4} 4 - 1} = -7{,}714q \text{ tfm};$$

$$M_3 = -\frac{6 \cdot 144q}{12^2} \cdot \frac{\left(6 \frac{15}{4} - 6\right)}{\frac{15}{4} 4 - 1} = -7{,}072q \text{ tfm}.$$

Los momentos de apoyo de los tramos no cargados se determinan por las fórmulas (15.14) y (15.15):

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = \frac{7{,}714q}{4} = 1{,}928q;$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = 0; \quad M_4 = -\frac{M_3}{k_4'} = 0.$$

El diagrama de momentos se expone en la fig. 313, *b*.

§ 148. CALCULO DE VIGAS CONTINUAS SOBRE APOYOS ELASTICOS. Se llaman vigas continuas sobre apoyos elásticos

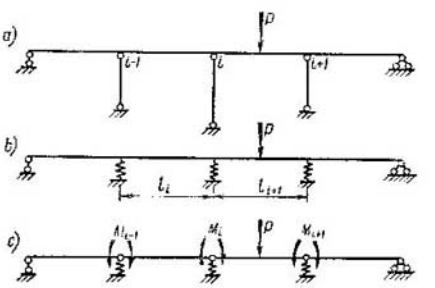
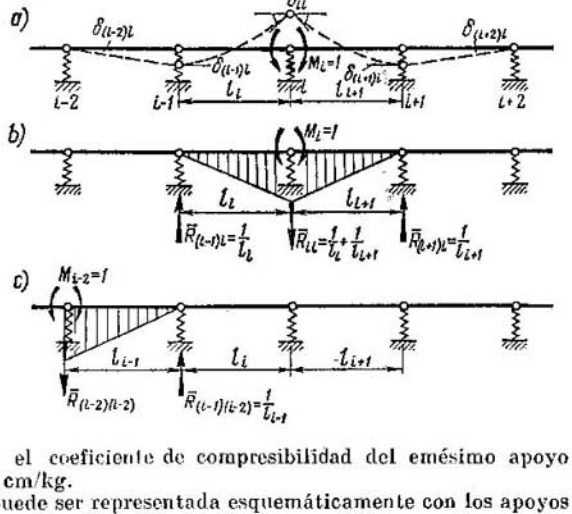


Fig. 314

a aquéllas cuyos puntos de apoyo, bajo carga, pueden desplazarse perpendicularmente al eje de la viga. Como ejemplo puede servir una viga continua sobre puntales largos (fig. 314, *a*). Consideraremos como apoyos elásticos a los capaces de deformarse linealmente, para los cuales, los desplazamientos de los puntos de apoyo de la viga son proporcionales a las reacciones de dichos apoyos

$$y_m = c_m R_m, \tag{15.26}$$

Fig. 315



donde c_m es el coeficiente de compresibilidad del emésimo apoyo en cm/kg.

Tal viga puede ser representada esquemáticamente con los apoyos en forma de muelles (fig. 314, *b*). El sistema básico se elige con las articulaciones sobre los apoyos (fig. 314, *c*). En el caso general, las ecuaciones canónicas para una viga continua sobre apoyos elásticos serán de cinco miembros y no de tres, como para la viga sobre apoyos rígidos. Esto es fácil de comprender, por cuanto, debido a la elasticidad de los apoyos, los desplazamientos originados por los momentos de apoyo M_i, ahora, se extienden sobre dos tramos a la derecha y sobre otros dos a la izquierda del apoyo i (fig. 315, *a*).

La ecuación canónica de los desplazamientos, por la dirección del momento de apoyo del medio M_i, tiene la forma:

$$\delta_{i(i-2)}M_{i-2}+\delta_{i(i-1)}M_{i-1}+\delta_{ii}M_i+$$
$$+\delta_{i(i+1)}M_{i+1}+\delta_{i(i+2)}M_{i+2}+\Delta_{iP}=0. \qquad (15.27)$$

Esta ecuación se llama ecuación de los cinco momentos. Sus coeficientes y miembros se determinan por las fórmulas:

$$\delta_{ik}=\sum\int \overline{M}_i\frac{\overline{M}_k}{EJ}\,ds+\sum c_m\overline{R}_{mi}\overline{R}_{mk}; \qquad (15.28)$$

$$\Delta_{iP}=\sum\int \overline{M}_i\frac{M_P}{EJ}\,ds+\sum c_m\overline{R}_{mi}R_{mP}, \qquad (15.29)$$

donde: $\overline{M}_i$ son los momentos en la viga, debidos a $M_i=1$;
$\overline{M}_k$, los momentos en la viga, debidos a $M_k=1$;
M_P, los momentos debidos a la carga dada;
$\overline{R}_{mi}$ es la reacción del apoyo m debida a $M_i=1$;

$\overline{R}_{mk}$, la reacción del apoyo m debida a $M_k = 1$;
$R_{m\,p}$, la reacción del apoyo m debida a la carga;
c_m, el coeficiente de compresibilidad del apoyo m.

Por ejemplo, según (15.28), el desplazamiento $\delta_{i\,(i-2)}$ es igual a (fig. 315, *b*):

$$\delta_{i\,(i-2)} = 0 + c_{i-1}\,\frac{1}{l_{i-1}} \cdot \frac{1}{l_i}.$$

Si los apoyos son absolutamente rígidos, entonces, para ellos, $c_m = 0$ y la ecuación de los cinco momentos se transforma en una de tres.

§ 149. DIAGRAMAS ENVOLVENTES TEORICOS DE LOS MOMENTOS FLECTORES. Al elegir las secciones transversales de las vigas continuas, como también, de otras cualesquiera, las medidas de las secciones se determinan, principalmente, por los momentos flectores. De ahí la necesidad de calcular sus valores máximos.

Si la viga continua se calcula sólo bajo una carga, para una sola posición de ésta, y si en el estado límite la viga se encuentra en la fase elástica, entonces, el diagrama de momentos debido a esta carga, construido por la ecuación de los tres o cinco momentos o por el método de los focos, será el diagrama de cálculo, por el cual se efectúa la elección de las secciones de la viga o la verificación de su resistencia.

Pero, si además de la carga permanente, como corrientemente sucede, sobre la viga van a actuar diferentes cargas accidentales, las cuales pueden encontrarse sobre ella, tanto juntas como separadas, en diferentes combinaciones, entonces, es imprescindible elegir, para cada sección de la viga, tal combinación de cargas, para la cual, en esta sección, apareciera el mayor momento flector.

Esta cuestión se resuelve de la manera más completa y exacta con la construcción de las líneas de influencia de los momentos flectores en algunas secciones de la viga. Pero tal vía es, también, bastante complicada.

Si se considera que la carga accidental es fija dentro de los límites de cada tramo y que actúa simultáneamente a lo largo de todo el tramo, entonces, esta cuestión se puede resolver, de una manera más simple, por medio de la determinación de los mayores valores teóricos de los momentos flectores en cada sección, cargando, por separado, cada tramo de la viga continua.

A fin de simplificar los razonamientos, examinemos cargas uniformemente repartidas, la permanente q y la accidental p, siendo que la última se reparte a todo lo largo del tramo y se dispone sobre uno o varios tramos simultáneamente. Construímos el diagrama de los momentos flectores debidos a las cargas dadas, permanente y accidental, ubicando esta última, sucesivamente, en cada tramo de la viga. Luego, componemos las expresiones de los valores más

altos, en valor absoluto, de los momentos flectores positivos y negativos, por las fórmulas:

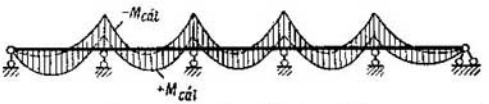
$$\left.\begin{aligned} +M_{calc} &= M_q + \sum(+M_p); \\ -M_{calc} &= M_q + \sum(-M_p), \end{aligned}\right\} \qquad (15.30)$$

donde: M_q es el momento flector debido a la carga permanente en la sección dada.

$+M_p$ son los momentos flectores debidos a las cargas accidentales que originan en la sección un momento positivo.

$-M_p$ los momentos flectores debidos a las cargas accidentales que originan en la sección un momento negativo.

Fig. 316



El aspecto aproximado del diagrama de cálculo de los momentos flectores se muestra en la fig. 316. Tal diagrama envolvente de los momentos de cálculo es particularmente cómodo al diseñar vigas de sección variable, por ejemplo, vigas soldadas o roblonadas con las chapas de las tablas cortadas. En este caso, no se debe olvidar que si el diagrama envolvente fue construido sin tener en cuenta la variación de las secciones de la viga, entonces, él refleja al diagrama real para la viga de sección variable, sólo **aproximadamente**. Por eso, si es necesario tener un cálculo preciso, entonces, este diagrama deberá ser reconstruido, teniendo en cuenta la variabilidad de la sección de la viga.

§ 150. METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS DE APOYO

1. EMPLEO DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA

Presentamos la ecuación de los tres momentos, para $P = 1$, en la forma canónica

$$\delta^*_{i(i-1)}M_{i-1} + \delta^*_{ii}M_i + \delta^*_{i(i+1)}M_{i+1} + \delta^*_{iP} = 0, \qquad (15.31)$$

donde

$$\delta^*_{i(i-1)} = \lambda_i; \quad \delta^*_{ii} = 2(\lambda_i + \lambda_{i+1});$$

$$\delta^*_{i(i+1)} = \lambda_{i+1}; \quad \lambda_i = \frac{l_i J_0}{J_i};$$

$$\delta^*_{iP} = 6EJ_0\delta_{iP} = 6EJ_0\left(\frac{\overline{\omega}_i a_i}{l_i EJ_i}\right) \text{ con el peso en el tramo } i;$$

$$\delta^*_{iP} = 6EJ_0\delta_{iP} = 6EJ_0\left(\frac{\overline{\omega}_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}}\right) \text{ con el}$$

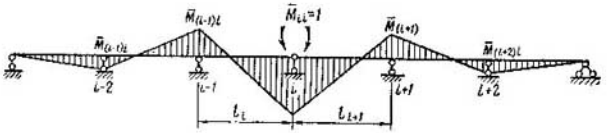
peso en el tramo $i+1$;

Las ecuaciones de las líneas de influencia de los momentos de apoyo se expresan, por medio de los coeficientes de influencia, de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I.i. de } M_1 = \beta_{11}\delta^*_{1P} + \beta_{12}\delta^*_{2P} + \ldots + \beta_{1n}\delta^*_{nP};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{I.i. de } M_k = \beta_{k1}\delta^*_{1P} + \beta_{k2}\delta^*_{2P} + \ldots + \beta_{kn}\delta^*_{nP};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{I.i. de } M_n = \beta_{n1}\delta^*_{1P} + \beta_{n2}\delta^*_{2P} + \ldots + \beta_{nn}\delta^*_{nP}.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.32)$$

Los coeficientes de influencia pueden ser hallados por medio de los determinantes por la fórmula (14.49) o, por el procedimiento

Fig. 317



de Gauss, por las (14.59) y (14.60) o, por el procedimiento de los momentos focales por la fórmula

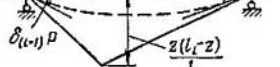
$$\beta_{ki} = -\frac{\bar{M}_{ki}k_i}{\lambda_i(k_ik'_i - 1)}, \qquad (15.33)$$

donde $\bar{M}_{ki}$ son los momentos de apoyo debidos a $M_{ii} = 1$ (fig. 317);
k_i y k'_i, las relaciones focales en el tramo i;
$k = 1, 2, 3, \ldots$;

$$\lambda_i = \frac{l_iJ_0}{J_i}.$$

El diagrama de los momentos flectores debidos a $M_{ii} = 1$ (fig. 317) se debe construir por el método de los focos de momentos.

Fig. 318



Los coeficientes de influencia se verifican por la expresión (14.47).

Para la determinación de $\delta^*_{(i-1)P}$ y δ^*_{iP}, examinemos el tramo i cargado con la fuerza $P = 1$ (fig. 318).

En este caso:

$$\bar{\omega}_i = \frac{z(l_i - z)}{2}; \quad a_i = \frac{1}{3}(l_i - z);$$

$$b_i = \frac{1}{3}(2l_i - z).$$

Tabla 7

u	0	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	1
$f_1(u)$	0	0,1710	0,2880	0,3281	0,3570	0,3840	0,3750	0
$f_2(u)$	0	0,0990	0,1920	0,2344	0,2730	0,3360	0,3750	0
u	0	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1	
$f_1(u)$	0	0,3360	0,2730	0,2344	0,1920	0,0990	0	
$f_2(u)$	0	0,3840	0,3570	0,3281	0,2880	0,1710	0	

Según (15.31):

$$\delta_{(i-1)P} = \frac{\bar{\omega}_i b_i}{l_i EJ_i} = \frac{z(l_i - z)(2l_i - z)}{6l_i EJ_i}; \qquad \delta_{iP} = \frac{\bar{\omega}_i a_i}{l_i EJ_i} = \frac{z(l_i - z)(l_i + z)}{6l_i EJ_i}.$$

Por consiguiente:

$$\delta^*_{(i-1)P} = 6EJ_0\delta_{(i-1)P} = l_i^2 \frac{J_0}{J_i} f_1(u); \tag{15.34}$$

$$\delta^*_{iP} = 6EJ_0\delta_{iP} = l_i^2 \frac{J_0}{J_i} f_2(u). \tag{15.35}$$

donde

$$f_1(u) = u(1-u)(2-u); \qquad f_2(u) = u(1-u^2); \qquad u = \frac{z}{l}.$$

Los valores de estas funciones se dan en la tabla 7.

Tomando en (15.34) y (15.35) los diferentes valores del índice $i = 1, 2, \ldots$, obtenemos los miembros libres de las ecuaciones (15.31) en dependencia de la posición del peso en uno u otro tramo. Colocándolos en las ecuaciones (15.32), obtenemos las ecuaciones de las líneas de influencia de los momentos de apoyo para la posición del peso en el tramo correspondiente.

Por ejemplo, cuando el peso se halla en el primer tramo

$$\delta^*_{1P} = l_1^2 \frac{J_0}{J_1} f_2(u).$$

Cuando el peso se encuentra en el primer tramo, las ecuaciones de las líneas de influencia, según (15.32), serán:

$$M_1 = \beta_{11} l_1^2 \frac{J_0}{J_1} f_2(u);$$

. . . . . .

$$M_k = \beta_{k1} l_1^2 \frac{J_0}{J_1} f_2(u);$$

. . . . . .

$$M_n = \beta_{n1} l_1^2 \frac{J_0}{J_1} f_2(u).$$

Si la viga tiene en el apoyo izquierdo un voladizo de longitud c, entonces, las líneas de influencia de los momentos de apoyo, sobre la parte voladiza, se representan tangentes a las líneas de influencia del apoyo izquierdo. Esto se desprende del método cinemático de construcción de las líneas de influencia, por el cual, la forma de éstas se determina por el diagrama de los desplazamientos verticales de la línea de carga. El diagrama de los desplazamientos verticales del voladizo es una recta, tangente al diagrama de los desplazamientos del apoyo extremo.

Para calcular las ordenadas de las líneas de influencia en el extremo del voladizo es necesario emplear la fórmula

$$M_i = -c\left(\frac{dM_i}{dz}\right)_{\text{para } z=0} = -c\left(\frac{dM_i}{du}\cdot\frac{du}{dz}\right)_{\text{para } u=0}. \qquad (15.36)$$

Cuando el peso está en el segundo tramo, las ecuaciones de las líneas de influencia son:

$$\delta^*_{1P} = l_2^2\frac{J_0}{J_2}f_1(u), \quad \delta^*_{2P} = l_2^2\frac{J_0}{J_2}f_2(u);$$

$$M_1 = \beta_{11}l_2^2\frac{J_0}{J_2}f_1(u) + \beta_{12}l_2^2\frac{J_0}{J_2}f_2(u);$$

. . . . . .

$$M_k = \beta_{k1}l_2^2\frac{J_0}{J_2}f_1(u) + \beta_{k2}l_2^2\frac{J_0}{J_2}f_2(u);$$

. . . . . .

$$M_n = \beta_{n1}l_2^2\frac{J_0}{J_2}f_1(u) + \beta_{n2}l_2^2\frac{J_0}{J_2}f_2(u),$$

etc.

Escribamos las igualdades (15.32) en la forma matriz:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^*_P = \begin{Vmatrix} \beta_{11}\beta_{12} \ldots \beta_{1n} \\ \beta_{21}\beta_{22} \ldots \beta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n1}\beta_{n2} \ldots \beta_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \delta^*_{1P} \\ \delta^*_{2P} \\ \ldots \\ \delta^*_{nP} \end{Vmatrix}. \qquad (15.32')$$

Todo lo dicho con respecto a (14.76) es válido aquí.

2. EMPLEO DEL METODO DE LOS FOCOS

El empleo del método de los focos consiste en utilizar las fórmulas de los momentos de apoyo del tramo cargado (15.21), para la fuerza $P = 1$:

$$M_{i-1} = -\frac{6}{l_i^2}\cdot\frac{z(l_i-z)}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}(2l_i-z)k'_i - \frac{1}{3}(l_i+z)}{k_ik'_i-1};$$

$$M_i = -\frac{6}{l_i^2}\cdot\frac{z(l_i-z)}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}(l_i+z)k_i - \frac{1}{3}(2l_i+z)}{k_ik'_i-1}.$$

Después de las transformaciones necesarias, obtenemos las ecuaciones de las líneas de influencia de los momentos de apoyo del tramo cargado i:

$$M_{i-1} = -l_i \frac{f_1(u)\, k_i' - f_2(u)}{k_i k_i' - 1}; \qquad (15.37)$$

$$M_i = -l_i \frac{f_2(u)\, k_i - f_1(u)}{k_i k_i' - 1}, \qquad (15.38)$$

donde $f_1(u)$ y $f_2(u)$ son las funciones anteriores de (15.34) — (15.35).

Si la viga tiene apoyos articulados en los extremos, entonces, las expresiones (15.37) y (15.38)poseen indeterminación, desarrollando la cual, obtenemos:

$$M_1 = -l_1 \frac{f_2(u)}{k_1'} \text{ para el peso en el primer tramo;} \qquad (15.39)$$

$$M_{m-1} = -l_m \frac{f_1(u)}{x_m} \text{ para el peso en el último emésimo tramo.} \qquad (15.40)$$

Para la posición del peso en el tramo i, las líneas de influencia de los demás momentos de apoyo se determinan por las ecuaciones de las líneas de influencia de los momentos de apoyo M_{i-1} y M_i de este tramo cargado: las líneas de influencia de los momentos de apoyo izquierdos son:

$$\text{l.i. de } M_{i-2} = -\frac{\text{l.i. de } M_{i-1}}{k_{i-1}}; \quad \text{l.i. de } M_{i-3} = -\frac{\text{l.i. de } M_{i-2}}{k_{i-2}}, \text{ etc.;} \qquad (15.41)$$

las líneas de influencia de los momentos de apoyos derechos son:

$$\text{l.i. de } M_{i+1} = -\frac{\text{l.i. de } M_i}{k_{i+1}'}; \quad \text{l.i. de } M_{i+2} = -\frac{\text{l.i. de } M_{i+1}}{k_{i+2}'}, \text{ etc.} \qquad (15.42)$$

Una vez construidas todas las líneas de influencia con el peso $P = 1$ en el tramo i, este peso se pasa al tramo siguiente y se repite la operación.

Ejemplo 39. Construir las líneas de influencia de los momentos de apoyo (fig. 319) siendo $J_0 = J_1 = J$.

Las longitudes reducidas de los tramos son:

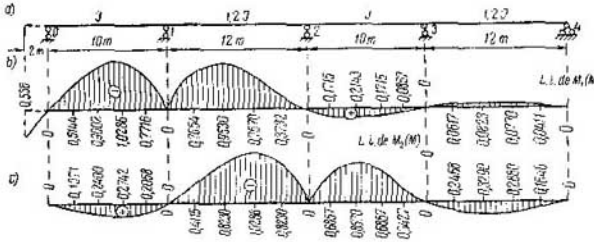
$$\lambda_1 = 10 \text{ m}, \qquad \lambda_2 = 12\frac{1}{1{,}2} = 10 \text{ m},$$

$$\lambda_3 = 10 \text{ m}, \qquad \lambda_4 = 12\frac{1}{1{,}2} = 10 \text{ m}.$$

Las ecuaciones de los tres momentos, por (15.31), son:

$$\begin{aligned} 2M_1(10+10) + M_2 10 + &\quad + \delta_{1P}^* = 0; \\ M_1 10 \quad + 2M_2(10+10) - M_3 10 &\quad + \delta_{2P}^* = 0; \\ M_2 10 \quad + 2M_3(10+10) &\quad + \delta_{3P}^* = 0. \end{aligned}$$

Fig. 319



La solución de estas ecuaciones o de las ecuaciones de las líneas de influencia, por (15.32), es:

$$\left.\begin{aligned} &\text{l.i. de } M_1 = \beta_{11}\delta^*_{1P} + \beta_{12}\delta^*_{2P} + \beta_{13}\delta^*_{3P};\\ &\text{l.i. de } M_2 = \beta_{21}\delta^*_{1P} + \beta_{22}\delta^*_{2P} + \beta_{23}\delta^*_{3P};\\ &\text{l.i. de } M_3 = \beta_{31}\delta^*_{1P} + \beta_{32}\delta^*_{2P} + \beta_{33}\delta^*_{3P}. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Los coeficientes de influencia β_{ik} se determinan por dos procedimientos.

1. Determinación de β_{ik} por el procedimiento de Gauss. Aportamos la tabla 8 del desarrollo directo.

Calculamos los coeficientes de influencia por las fórmulas (14.59) y (14.60).

Primera operación: a) para la fórmula (14.59) $k=3$;

b) para la fórmula (14.60) $k=3$, $i=2,1$:

$$\beta_{33} = -\frac{1}{\delta^{(3)}_{33}} = -\frac{15}{560};$$

$$\beta_{32} = \alpha_{23}\beta_{33} = \left(-\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{15}{560}\right) = \frac{4}{560};$$

$$\beta_{31} = \alpha_{12}\beta_{32} + \alpha_{13}\beta_{33} = \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{4}{560} = -\frac{1}{560}.$$

Segunda operación: a) para la fórmula (14.59) $k=2$; b) para la fórmula (14.60) $k=2$, $i=1$:

$$\beta_{22} = -\frac{1}{\delta^{(2)}_{22}} + \alpha_{23}\beta_{32} = -\frac{1}{\frac{75}{2}} + \left(-\frac{4}{15}\right)\frac{4}{560} = -\frac{16}{560};$$

$$\beta_{21} = \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{23} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{16}{560}\right) = \frac{4}{560}.$$

Tercera operación: a) para la fórmula (14.59) $k=1$:

$$\beta_{11} = -\frac{1}{\delta_{11}} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} = -\frac{1}{40} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{560} = -\frac{15}{560}.$$

2. Determinación de los coeficientes β_{ik} empleando los determinantes de (14.49).

El determinante de los coeficientes es

$$D = \begin{Vmatrix} 40 & 10 & 0 \\ 10 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{Vmatrix} = 56\,000$$

Tabla 8

N° del renglón	N° de la ecuación y coeficiente α	M_1	M_2	M_3	S_i
1	(1)	40	10	0	50
2	α_{1k}	·	$\alpha_{12}=-\frac{1}{4}$	$\alpha_{13}=0$	
3	(2)	10	40	10	60
4	$\alpha_{12}(1)$	·	−2,5	0	−12,5
5	$(2^{(1)})$	·	37,5	10	$\rightarrow$ ↓ 47,5
6	α_{2k}	·	·	$\alpha_{23}=-\frac{4}{15}$	
7	(3)	0	10	40	50
8	$\alpha_{13}(1)$	·	·	0	
9	$\alpha_{23}(2^{(1)})$	·	·	$-\frac{40}{15}$	$-\frac{190}{15}$
10	$(3^{(2)})$	·	·	$\frac{560}{15}$	$\rightarrow$ ↓ $\frac{560}{15}$

Al calcular los coeficientes β_{ik} excluimos del determinante D la i-ésima línea y la k-ésima columna, o bien la k-ésima línea y la i-ésima columna;

$$\beta_{11}=(-1)^{(1+1)+(1+1)}\frac{\begin{vmatrix}40 & 10\\ 10 & 40\end{vmatrix}}{56\,000}=\frac{15}{560};$$

$$\beta_{12}=(-1)^{(1+2)+(1+1)}\frac{\begin{vmatrix}10 & 10\\ 0 & 40\end{vmatrix}}{56\,000}=-\frac{4}{560};$$

$$\beta_{13}=(-1)^{(1+3)+(1+1)}\frac{\begin{vmatrix}10 & 40\\ 0 & 10\end{vmatrix}}{56\,000}=-\frac{1}{560};$$

$$\beta_{22}=(-1)^{(2+2+1)}\frac{\begin{vmatrix}40 & 0\\ 0 & 40\end{vmatrix}}{56\,000}=-\frac{16}{560};$$

$$\beta_{23}=(-1)^{(2+3+1)}\begin{vmatrix}40 & 10\\ 0 & 10\end{vmatrix}:56\,000=\frac{4}{560};$$

$$\beta_{33}=(-1)^{(3+3+1)}\begin{vmatrix}40 & 10\\ 10 & 40\end{vmatrix}:56\,000=-\frac{15}{560}.$$

Verificamos los coeficientes por (14,47)

$$-\frac{15}{560}40+\frac{4}{560}10=-1;\qquad \frac{4}{560}10-\frac{16}{560}40+\frac{4}{560}10=-1;$$

$$-\frac{1}{560}0+\frac{4}{560}10-\frac{15}{560}40=-1.$$

Las igualdades necesarias han sido satisfechas.
Las ecuaciones (a), con los coeficientes numéricos, son:

$$\left.\begin{aligned}&\text{l.i. de } M_1=-\frac{15}{560}\delta^*_{1P}+\frac{4}{560}\delta^*_{2P}-\frac{1}{560}\delta^*_{3P};\\ &\text{l.i. de } M_2=\frac{4}{560}\delta^*_{1P}-\frac{16}{560}\delta^*_{2P}+\frac{4}{560}\delta^*_{3P};\\ &\text{l.i. de } M_3=-\frac{1}{560}\delta^*_{1P}+\frac{4}{560}\delta^*_{2P}-\frac{15}{560}\delta^*_{3P}.\end{aligned}\right\}\qquad (b)$$

Determinamos los valores de los términos de carga por las fórmulas (15.34) y (15.35).
El peso se halla en el primer tramo

$$\delta^*_{1P}=l_1^2\frac{J}{J_1}f_2(u)=10^2f_2(u).$$

El peso se halla en el segundo tramo

$$\delta^*_{1P}=l_2^2\frac{J}{J_2}f_1(u)=12^2\frac{J}{1,2J}f_1(u)=120f_1(u);$$

$$\delta^*_{2P}=l_2^2\frac{J}{J_2}f_2(u)=12^2\frac{J}{1,2J}f_2(u)=120f_2(u).$$

El peso se halla en el tercer tramo

$$\delta^*_{2P}=l_3^2\frac{J}{J_3}f_1(u)=100f_1(u);$$

$$\delta^*_{3P}=l_3^2\frac{J}{J_3}f_2(u)=100f_2(u).$$

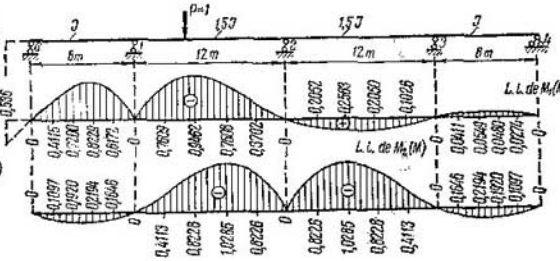
El peso se halla en el cuarto tramo

$$\delta^*_{3P}=l_4^2\frac{J}{J_4}f_1(u)=120f_1(u).$$

Componemos las ecuaciones de las líneas de influencia según (b).
En el primer tramo

$$\left.\begin{aligned}&\text{l.i. de } M_1=-2{,}68f_2(u);\\ &\text{l.i. de } M_2=0{,}714f_2(u);\\ &\text{l.i. de } M_3=-0{,}1785f_2(u).\end{aligned}\right\}\qquad (c)$$

Fig. 320



Determinamos la ordenada de la l.i. de M_1 en el extremo de un voladizo de 2 m de longitud, suponiendo a la viga voladiza:

$$M_1 = -2\left[-2{,}68 f_2'(u)\frac{1}{l_1}\right]_{u=0} = -2\left[-2{,}68\,(1-3u^2)\frac{1}{10}\right]_{u=0} = 0{,}536 \text{ m}.$$

En el segundo tramo

$$\left.\begin{aligned} &\text{l.i. de } M_1 = -3{,}23 f_1(u) + 0{,}857 f_2(u);\\ &\text{l.i. de } M_2 = 0{,}857 f_1(u) - 3{,}429 f_2(u);\\ &\text{l.i. de } M_3 = -0{,}2142 f_1(u) + 0{,}857 f_2(u). \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

En el tercer tramo

$$\left.\begin{aligned} &\text{l.i. de } M_1 = 0{,}714 f_1(u) - 0{,}1785 f_2(u);\\ &\text{l.i. de } M_2 = -2{,}857 f_1(u) + 0{,}714 f_2(u);\\ &\text{l.i. de } M_3 = 0{,}714 f_1(u) - 2{,}68 f_2(u). \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

En el cuarto tramo

$$\left.\begin{aligned} &\text{l.i. de } M_1 = -0{,}2142 f_1(u);\\ &\text{l.i. de } M_2 = 0{,}857 f_1(u);\\ &\text{l.i. de } M_3 = -3{,}23 f_1(u). \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Las líneas de influencia de M_1 y M_2 se exponen en la fig. 319, *b*, *c*.

Ejemplo 40. Construir las líneas de influencia de los momentos de apoyo de la viga continua de la fig. 320 por el método de focos. Para $J_0 = J$, las longitudes reducidas de los tramos son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 8$ m.

Las relaciones focales, por (15.46) y (15.47), son:

$$k_1 = \infty; \quad k_2 = 2 + \frac{8}{8}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4;$$

$$k_3 = 2 + \frac{8}{8}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4};$$

$$k_4 = 2 + \frac{8}{8}\left(2 - \frac{4}{15}\right) = \frac{56}{15}.$$

Correspondientemente:

$$k_4' = \infty; \quad k_3' = 4; \quad k_2' = \frac{15}{4};$$

$$k_1' = \frac{56}{15}.$$

El peso se halla en el primer tramo: por (15.39)

$$\text{l.i. de } M_1 = -8 f_2(u) : \frac{56}{15} = \frac{15}{7} f_2(u).$$

Si la viga tuviera voladizo izquierdo, entonces, la ordenada de la l.i. en el extremo del voladizo podría ser determinada por la expresión (15.36). Mostremos esto, suponiendo que la longitud del voladizo es igual a 2 m.

$$\frac{dM_1}{dz} = -\frac{15}{7}(1-3u^2)\frac{1}{8}; \qquad \left(\frac{dM_1}{dz}\right)_{u=0} = -\frac{15}{56} = -0{,}268.$$

La ordenada de la l.i. en el extremo del voladizo, es $M_1 = -0{,}268\,(-2) = 0{,}536$ m.

Las ecuaciones de las líneas de influencia de los demás momentos de apoyo en la zona del primer tramo, se hallan por (15.42):

$$\text{l.i. de } M_2 = -\frac{\text{l.i. de } M_1}{k_2'} = \frac{4}{7} f_2(u), \qquad \text{l.i. de } M_3 = -\frac{\text{l.i. de } M_2}{k_2'} = \frac{1}{7} f_2(u).$$

El peso se halla en el segundo tramo: las ecuaciones de las líneas de influencia de los momentos de apoyo en la zona del segundo tramo se hallan por las expresiones (15.37) y (15.38)

$$M_1 = -12\,\frac{f_1(u)\frac{15}{4} - f_2(u)}{4\frac{15}{4} - 1} = -\frac{45}{14} f_1(u) + \frac{6}{7} f_1(u);$$

$$M_2 = -12\,\frac{f_2(u)\,4 - f_1(u)}{4\frac{15}{4} - 1} = -\frac{24}{7} f_2(u) - \frac{6}{7} f_1(u);$$

$$\text{l.i. de } M_3 = -\frac{\text{l.i. de } M_2}{k_2'} = -\frac{6}{7} f_2(u) - \frac{3}{14} f_1(u).$$

Las ecuaciones obtenidas son suficientes para construir las líneas de influencia en el tercero y cuarto tramo por las condiciones de simetría de la viga.

No obstante, hallemos directamente estas ecuaciones, sin emplear las condiciones de simetría.

El peso se halla en el tercer tramo: por las mismas expresiones tendremos:

$$M_2 = -12\,\frac{f_1(u)\,4 - f_2(u)}{\frac{15}{4}4 - 1} = -\frac{24}{7} f_1(u) + \frac{6}{7} f_2(u);$$

$$M_3 = -12\,\frac{f_2(u)\frac{15}{4} - f_1(u)}{\frac{15}{4}4 - 1} = -\frac{45}{14} f_2(u) + \frac{6}{7} f_1(u);$$

$$\text{l.i. de } M_1 = -\frac{\text{l.i. de } M_2}{k_2} = \frac{6}{7} f_1(u) - \frac{3}{14} f_2(u).$$

El peso se halla en el cuarto tramo: por la expresión (15.40)

$$M_3 = -8\,\frac{f_1(u)}{\frac{56}{15}} = -\frac{15}{7} f_1(u).$$

Las ecuaciones de las l.i. de los momentos de apoyo restantes, en el cuarto tramo, son:

$$\text{l.i. de } M_2 = -\frac{\text{l.i. de } M_3}{k_3} = \frac{4}{7} f_1(u), \quad \text{l.i. de } M_1 = -\frac{\text{l.i. de } M_2}{k_2} = -\frac{1}{7} f_1(u).$$

Las líneas de influencia de la fig. 320, *b*, *c*, se construyeron por las ecuaciones obtenidas.

§ 151. EMPLEO DE LA SIMETRIA EN EL METODO ESTATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS DE APOYO. La construcción de las líneas de influencia de los momentos de apoyo en las vigas simétricas, puede ser simplificada empleando incógnitas pares. Aquí, examinaremos otras simplificaciones de la construcción de las líneas de influencia de los momentos de apoyo, que se desprenden de la esencia de los procedimientos expuestos anteriormente.

1. SIMPLIFICACIONES CON EL EMPLEO DE LOS COEFICIENTES DE INFLUENCIA

Descomponemos la fuerza $P = 1$ (fig. 321, *a*) en componentes simétricas e inversamente simétricas (fig. 321, *b*, *c*). En el caso de fuerzas simétricas, los momentos de apoyo ubicados simétricamente son iguales, pero, si las fuerzas son inversamente simétricas, dichos momentos son iguales en valor absoluto y de signo contrario.

Esto permite plantear las ecuaciones de tres momentos no para toda la viga, sino sólo para su parte hasta el eje de simetría o hasta el primer apoyo tras de este eje. En este caso es necesario diferenciar dos casos.

Vigas con un número par de tramos (fig. 321).

Si m es el número de tramos de la viga, entonces, podemos escribir que

$$M^s_{m/2-1} = M^s_{m/2+1}, \qquad M^{i\,s}_{m/2} = 0. \tag{15.43}$$

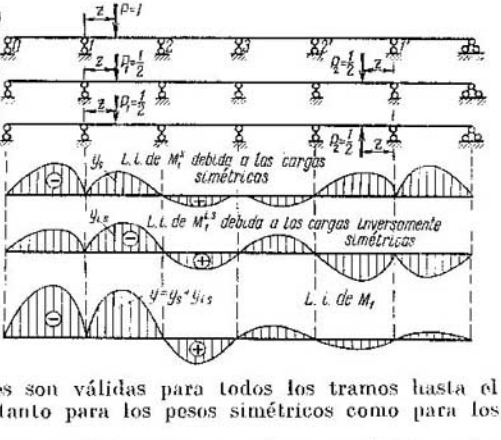
En este caso, las ecuaciones de tres momentos para fuerzas simétricas se componen hasta que la última ecuación contenga el primer momento de apoyo después del eje de simetría y, en el caso de fuerzas inversamente simétricas, el momento de apoyo sobre el eje de simetría. Esto significa que, en la ecuación de tres momentos (15.31), el índice i toma sucesivamente los valores desde 1 hasta $i = \frac{m}{2}$, en el caso de fuerzas simétricas y, hasta $i = \frac{m}{2} - 1$, si las fuerzas son inversamente simétricas.

En ambos casos deben tenerse en cuenta las expresiones (15.43).

Para pesos apareados, los términos independientes de (15.34) y (15.35) son iguales a:

$$\delta^*_{(i-1)P} = \frac{l_i^2}{2J_i} J_0 f_1(u), \quad \delta^*_{iP} = \frac{l_i^2}{2J_i} J_0 f_2(u). \tag{15.44}$$

Fig. 321



Estas expresiones son válidas para todos los tramos hasta el apoyo intermedio, tanto para los pesos simétricos como para los de simetría inversa.

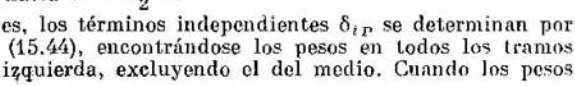
Las líneas de influencia de los momentos de apoyo debidos a los pesos apareados se construyen hasta el eje de simetría y, en la segunda mitad de la viga, se construyen sobre la base de dicha simetría. Las líneas de influencia de los pesos simétricos son simétricas (fig. 321, *d*) y, las de los inversamente simétricos, de simetría inversa (fig. 321, *e*). La ordenada que determina el momento de apoyo, debido a las mitades de los pesos apareados, se coloca debajo del peso $P_1 = 1/2$. Las líneas de influencia de los momentos de apoyo debidos al peso $P = 1$ se obtienen con la suma de las líneas de influencia debidas a las mitades de los pesos simétricos y de simetría inversa (fig. 321, *f*).

Vigas con número impar de tramos (fig. 322). En este caso

$$M^s_{\frac{m-1}{2}} = M^s_{\frac{m+1}{2}}, \quad M^{i.s}_{\frac{m-1}{2}} = -M^{i.s}_{\frac{m+1}{2}}. \qquad (15.45)$$

Las ecuaciones de tres momentos, para pesos simétricos e inversamente simétricos, se componen hasta que en la última ecuación

Fig. 322



entre el primer momento de apoyo tras el eje de simetría. En otras palabras, el índice i en (15.31), toma, sucesivamente, los valores desde $i = 1$ hasta $i = \frac{m-1}{2}$.

Como antes, los términos independientes δ_{iP} se determinan por la expresión (15.44), encontrándose los pesos en todos los tramos de la mitad izquierda, excluyendo el del medio. Cuando los pesos

están ubicados en el tramo del medio (fig. 323) las expresiones δ^*_{lP} serán otras y, se obtienen empleando la fórmula general de los desplazamientos:

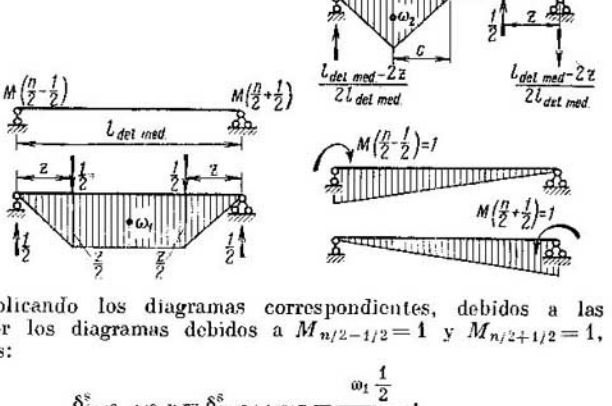
$$\omega_1 = \left(\frac{1}{2}\, z\, \frac{z}{2}\right) 2 + \frac{z}{2}\,(l_{med} - 2z) = \frac{z}{2}\,(l_{med} - z);$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_{med}}{2}\, z\, \frac{(l_{med} - 2z)}{2l_{med}} = \frac{z}{8}\,(l_{med} - 2z);$$

$$c = \frac{1}{3}\left(\frac{l_{med}}{2} + \frac{l_{med}}{2} - z\right) = \frac{1}{3}\,(l_{med} - z);$$

$$S = \omega_2 c \cdot 2 = \frac{z}{8}\,(l_{med} - 2z)\,\frac{1}{3}\,(l_{med} - z)\,2.$$

Fig. 323



Multiplicando los diagramas correspondientes, debidos a las cargas por los diagramas debidos a $M_{n/2-1/2} = 1$ y $M_{n/2+1/2} = 1$, obtenemos:

$$\delta^s_{(n/2-1/2)P} = \delta^s_{(n/2+1/2)P} = \frac{\omega_1 \frac{1}{2}}{EJ_{med}};$$

$$\delta^{i.s}_{(n/2-1/2)P} = -\delta^{i.s}_{(n/2+1/2)P} = \frac{S \frac{1}{l_{med}}}{EJ_{med}}$$

o bien

$$\delta^s_{(n/2-1/2)P} = \delta^s_{(n/2+1/2)P} = \frac{l^2_{med}}{12EJ_{med}}\,[f_1(u) + f_2(u)], \qquad (15.46)$$

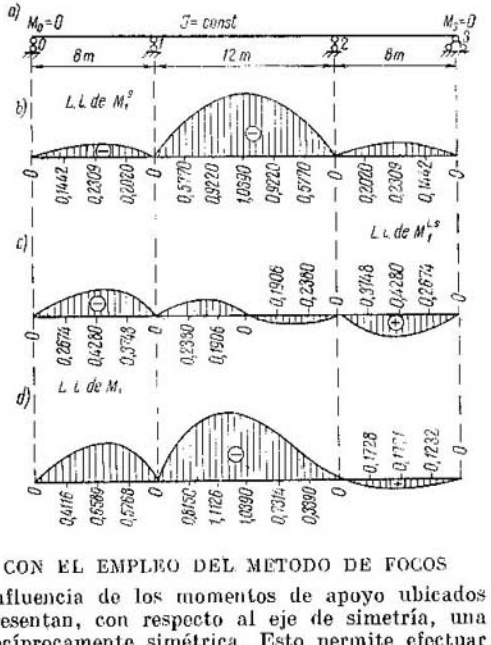
$$\delta^{i.s}_{(n/2-1/2)P} = -\delta^{i.s}_{(n/2+1/2)P} = \frac{l^2_{med}}{12EJ_{med}}\,[f_1(u) - f_2(u)]. \qquad (15.47)$$

De este modo:

$$\delta^{*s}_{\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)P} = \delta^{*s}_{(n/2+1/2)P} = \frac{J_0}{2J_{med}}\, l^2_{med}\,[f_1(u) + f_2(u)]; \qquad (15.48)$$

$$\delta^{i.s}_{(n/2-1/2)P} = -\delta^{*s}_{(n/2+1/2)P} = \frac{J_0}{2J_{med}}\, l^2_{med}\,[f_1(u) - f_2(u)]. \qquad (15.49)$$

Fig. 324



2. SIMPLIFICACION CON EL EMPLEO DEL METODO DE FOCOS

Las líneas de influencia de los momentos de apoyo ubicados simétricamente representan, con respecto al eje de simetría, una imagen especular recíprocamente simétrica. Esto permite efectuar la construcción de las líneas de influencia de todos los momentos de apoyo sobre una mitad, por ejemplo, la izquierda, sólo hasta el eje de simetría y, más allá de él, se construyen aprovechando que las líneas de influencia de los momentos de apoyo simétricamente distribuidos coinciden al girar 180° una de ellas alrededor del eje de simetría. En este caso, está claro que, en las expresiones analíticas de las líneas de influencia, la coordenada u, a la derecha del eje de simetría deberá contarse en sentido contrario, de derecha a izquierda.

Ejemplo 41. Construir la línea de influencia del momento de apoyo utilizando la simetría (fig. 324).

La ecuación de tres momentos, cuando $J_0 = J$, para pesos simétricos, es

$$2(8+12)M_1^s+12M_2^s+\delta_{1P}^{*s}=0; \qquad (a)$$

para pesos inversamente simétricos, es

$$2(8+12)M_1^{i.s}-12M_2^{i.s}+\delta_{1P}^{*i.s}=0. \qquad (b)$$

El peso se halla en el primer tramo: por (15.44)

$$\delta_{1P}^{*}=\delta_{1P}^{*i.s}=\frac{l_1^2}{2}f_2(u)=32f_2(u).$$

Las ecuaciones de las líneas de influencia, por (a) y (b), son

$$\text{l.i. de } M_1^s = -\frac{8}{13} f_2(u), \quad \text{l.i. de } M_1^{1.s} = -\frac{8}{7} f_2(u). \tag{c}$$

El peso se halla en el segundo (en el del medio) tramo: por (15.48) y (15.49)

$$\delta_{1P}^{*s} = \frac{12^2}{2}[f_1(u) + f_2(u)]; \quad \delta_{1P}^{*1.s} = \frac{12^2}{2}[f_1(u) - f_2(u).$$

La ecuación de la l.i., por (a), es

$$\text{l.i. de } M_1^s = -\frac{18}{13}[f_1(u) + f_2(u)]. \tag{d}$$

La ecuación de la l.i., por (b), es

$$\text{l.i. de } M_1^{1.s} = -\frac{18}{7}[f_1(u) - f_2(u)]. \tag{e}$$

Las líneas de influencia debidas a los pesos simétricos e inversamente simétricos están representadas en la fig. 324, *b*, *c* y, la línea de influencia sumaria del momento de apoyo M_1, en la fig. 324, *d*.

§ 152. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS DE APOYO. Durante la construcción de las líneas de influencia del momento

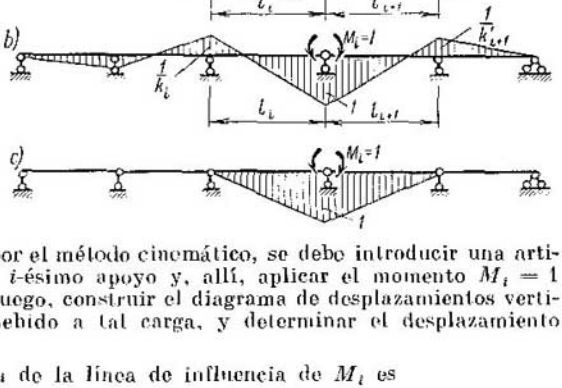


Fig. 325

de apoyo M_i por el método cinemático, se debe introducir una articulación en el i-ésimo apoyo y, allí, aplicar el momento $M_i = 1$ (fig. 325, *a*). Luego, construir el diagrama de desplazamientos verticales $\delta_{Pi}^{(n-1)}$, debido a tal carga, y determinar el desplazamiento $\delta_{ii}^{(n-1)}$.

La ecuación de la línea de influencia de M_i es

$$\text{l.i de } M_i = -\frac{\delta_{Pi}^{(n-1)}}{\delta_{ii}^{(n-1)}}. \tag{15.50}$$

Los valores $\delta_{Pi}^{(n-1)}$ y $\delta_{ii}^{(n-1)}$ se determinan del diagrama de momentos flectores debido a $M_i = 1$. Para su construcción empleamos el

método de los focos (fig. 325, *b*). El valor $\delta_{ii}^{(n-1)}$ puede ser obtenido multiplicando el diagrama por sí mismo. Pero tal multiplicación resulta complicada. Mejor es construir en la viga isostática el segundo diagrama unitario debido a $M_i = 1$ (fig. 325, *c*).

Multiplicando los diagramas tendremos que

$$\delta_{ii}^{(n-1)} = \frac{1 \cdot l_i}{2}\left(\frac{2}{3}\,1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k_i}\right)\frac{1}{EJ_i} + \frac{1 \cdot l_{i+1}}{2}\left(\frac{2}{3}\,1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k'_{i+1}}\right)\frac{1}{EJ_{i+1}}.$$

O, definitivamente, en dos formas

$$EJ_0\delta_{ii}^{(n-1)} = \frac{\lambda_i}{6}\cdot\frac{k_i k'_i - 1}{k_i} = \frac{\lambda_{i+1}}{6}\cdot\frac{k_{i+1}k'_{i+1} - 1}{k'_{i+1}}. \qquad (15.51)$$

De esta igualdad se desprende una posible verificación de las relaciones focales

$$\lambda_i\frac{k_i k'_i - 1}{k_i} = \lambda_{i+1}\frac{k_{i+1}k'_{i+1} - 1}{k'_{i+1}}. \qquad (15.52)$$

Para la determinación de $\delta_{Pi}^{(n-1)}$, en cualquier tramo k, empleamos la fórmula general de los desplazamientos. Durante la deducción

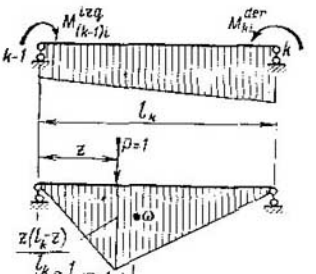


Fig. 326

de la expresión $\delta_{Pi}^{(n-1)}$ consideremos que los momentos de apoyo son **positivos** (fig. 326). Multiplicando los diagramas, obtenemos

$$\delta_{Pi}^{(n-1)} = \frac{z\,(l_k - z)}{2EJ_k}\left[\frac{M_{(k-1)i}}{l_k}\cdot\frac{1}{3}\,(2l_k - z) + \frac{M_{ki}}{k}\cdot\frac{1}{3}\,(l_k + z)\right].$$

Después de simples transformaciones, obtenemos, definitivamente, $\delta_{Pi}^{(n-1)}$ para el peso en el tramo k

$$\delta_{Pi}^{(n-1)} = \frac{l_k^2}{6EJ_k}\,[M_{(k-1)i}f_1(u) + M_{ki}f_2(u)], \qquad (15.53)$$

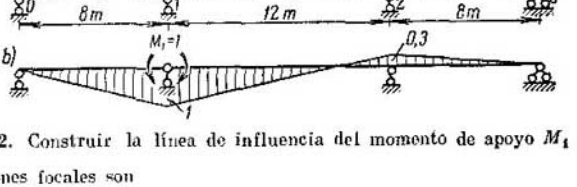
donde $f_1(u) = u\,(1 - u)\,(2 - u)$ y $f_2(u) = u\,(1 - u^2)$, son las funciones (15.35) obtenidas anteriormente.

La ecuación de las líneas de influencia del momento de apoyo M_i en el tramo k, es

$$\text{l.i. de } M_i = -\frac{l_k\lambda_k k_i}{\lambda_i\,(k_i k'_i - 1)}\,[M_{(k-1)i}f_1(u) + M_{ki}f_2(u)]. \qquad (15.54)$$

El empleo de la simetría, consiste en utilizar incógnitas pares simétricas y de simetría inversa. La construcción de sus l.i. se efectúa de la misma manera que la de la l. i. de una incógnita simple. Los diagramas unitarios debidos a incógnitas pares, es cómodo obtenerlos sumando los diagramas unitarios debidos a incógnitas simples. Los últimos se construyen simplemente, por el método de los focos.

Fig. 327



Ejemplo 42. Construir la línea de influencia del momento de apoyo M_1 (fig. 327).

Las relaciones focales son

$$k_1 = \infty,$$

$$k_2 = 2 + \frac{8}{12}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{10}{3},$$

$$k_3 = 2 + \frac{12}{8}\left(2 - \frac{3}{10}\right) = \frac{91}{20}.$$

El diagrama de momentos debido a $M_1 = 1$ se da en la fig. 327, *b*.

La ecuación de la línea de influencia de M_1, en cualquier tramo k, por (15.54), es

$$\text{l.i. de } M_1 = -\frac{l_k \lambda_k k_1}{\lambda_1 (k_1 k_1' - 1)} [M_{(k-1)1} f_1(u) + M_{k1} f_2(u)].$$

Para $k_1 = \infty$, ella contiene indeterminación. La desarrollamos dividiendo el numerador y denominador por k_1, después de lo cual, obtenemos

$$\text{l.i. de } M_1 = -\frac{l_k \lambda_k}{\lambda_1 k_1'} [M_{(k-1)1} f_1(u) + M_{k1} f_2(u)].$$

El peso se halla en el primer tramo: $M_{01} = 0$, $M_{11} = 1$

$$\text{l.i. de } M_1 = -\frac{8 \cdot 8}{8 \dfrac{91}{20}} f_2(u) = -1{,}7582 f_2(u).$$

El peso se halla en el segundo tramo: $M_{11} = 1$, $M_{21} = -\dfrac{3}{10}$

$$\text{l.i. de } M_1 = -\frac{12 \cdot 12}{8 \dfrac{91}{20}} \left[1 f_1(u) - \frac{3}{10} f_2(u)\right] = 3{,}956 [f_1(u) - 0{,}3 f_2(u)].$$

El peso se halla en el tercer tramo: $M_{21} = \dfrac{3}{10}$, $M_{31} = 0$

$$\text{l.i. de } M_1 = -\frac{8 \cdot 8}{8 \dfrac{91}{20}} \left[-\frac{3}{10} f_1(u) + 0\right].$$

Las ordenadas de las líneas de influencia calculadas por estas expresiones son iguales a las obtenidas anteriormente (véase la fig. 324, *d*).

Ejemplo 43. Construir la línea de influencia del momento de apoyo M_2 (fig. 328, *a*).

Las longitudes reducidas de los tramos, para $J_0 = J$, son:

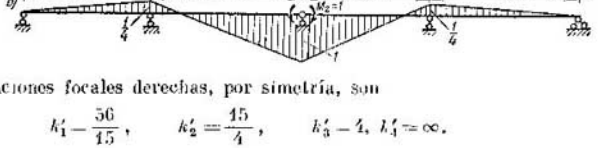
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 10 \text{ m}.$$

Las relaciones focales izquierdas son

$$k_1 = \infty, \quad k_2 = 2 + \frac{10}{10}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4,$$

$$k_3 = 2 + \frac{10}{10}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}, \quad k_4 = 2 + \frac{10}{10}\left(2 - \frac{1}{\frac{15}{4}}\right) = \frac{56}{15}.$$

Fig. 328



Las relaciones focales derechas, por simetría, son

$$k_1' = \frac{56}{15}, \qquad k_2' = \frac{15}{4}, \qquad k_3' = 4, \quad k_4' = \infty.$$

En la fig. 328, *b* se expone el diagrama de los momentos debidos a $M_2 = 1$. La ecuación de la línea de influencia, por (15.54), es

$$\text{l.i. de } M_2 = -\frac{l_h \lambda_k \lambda}{10\left(4\frac{15}{4} - 1\right)}\left[M_{(k-1)2} f_1(u) + M_{k2} f_2(u)\right].$$

El peso se halla en el primer tramo: $M_{02} = 0$, $M_{12} = -\frac{1}{4}$

$$\text{l.i. de } M_2 = -\frac{1}{35} 10 \cdot 10\left[0 - \frac{1}{4} f_2(u)\right] = \frac{5}{7} f_2(u),$$

El peso se halla en el segundo tramo: $M_{12} = -\frac{1}{4}$, $M_{22} = 1$

$$\text{l.i. de } M_2 = -\frac{1}{35} 12 \cdot 10\left[-\frac{1}{4} f_1(u) - f_2(u)\right].$$

El peso se halla en el tercer tramo: $M_{22} = 1$, $M_{32} = -\frac{1}{4}$

$$\text{l.i. de } M_2 = -\frac{1}{35} 10 \cdot 10\left[f_1(u) - \frac{1}{4} f_2(u)\right].$$

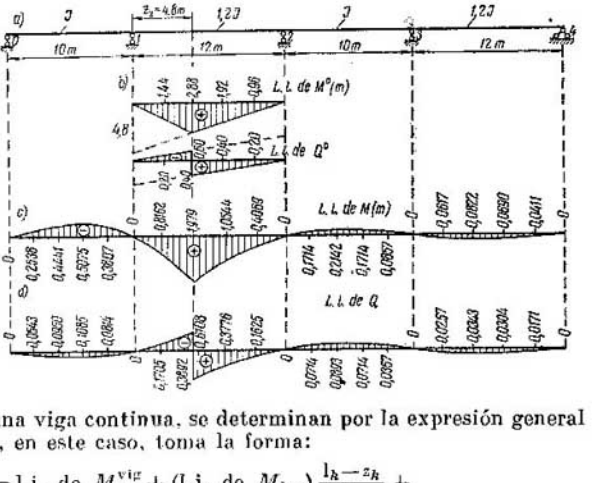
El peso se halla en el cuarto tramo: $M_{32} = -\frac{1}{4}$, $M_{42} = 0$

$$\text{l.i. de } M_2 = -\frac{1}{35} 12 \cdot 10\left[-\frac{1}{4} f_1(u) - 0\right] = \frac{6}{7} f_1(u).$$

Las ordenadas de la línea de influencia calculadas son iguales a las obtenidas anteriormente por otro procedimiento (véase la fig. 319, *c*).

§ 153. LINEAS DE INFLUENCIA DE M Y Q EN EL TRAMO. Las líneas de influencia de M y Q en cualquier sección z_k de cualquier

Fig. 329



tramo k de una viga continua, se determinan por la expresión general (14.77), que, en este caso, toma la forma:

$$\text{l.i. de } M_{z_k} = \text{l.i. de } M^{\text{vig}}_{z_k} + (\text{l.i. de } M_{k-1})\frac{l_k - z_k}{l_k} + \\ + (\text{l.i. de } M_k)\frac{z_k}{l_k}; \qquad (15.55)$$

$$\text{l.i. de } Q_{z_k} = \text{l.i. de } Q^{\text{vig}}_{z_k} + (\text{l.i. de } M_k - \text{l.i. de } M_{k-1})\frac{1}{l_k} \qquad (15.56)$$

La línea de influencia del momento flector en la sección z_k del tramo k, se compone de la línea de influencia del momento en esta misma sección del sistema básico isostático, o sea, de una viga simplemente apoyada $M^{\text{vig}}_{z_k}$; de la línea de influencia del momento de apoyo izquierdo M_{k-1} multiplicada por $\frac{l_k - z_k}{l_k}$ y, de la línea de influencia del momento derecho M_k multiplicada por $\frac{z_k}{l_k}$. La línea de influencia de la fuerza transversal se compone de su línea de influencia $Q^{\text{vig}}_{z_k}$ en una viga simplemente apoyada y de la diferencia de las líneas de influencia de los momentos de apoyo M_k y M_{k-1}, dividida por la longitud del tramo.

Ejemplo 44. Construir las líneas de influencia de M y Q en la sección del segundo tramo de la viga examinada en el ejemplo 43 (fig. 329, *a*), para $z_2 = 4{,}8$ m.

Las ecuaciones de las líneas de influencia, por (15.55) y (15.56), son:

$$\text{l.i. de } M_{z_2} = \text{l.i. de } M^{\text{vig}}_{z_2} + (\text{l.i. de } M_1)\frac{l_2 - z_2}{l_2} + \\ + (\text{l.i. de } M_2)\frac{z_2}{l_2} = \text{l.i. de } M^{\text{vig}}_{4,8} + (\text{l.i. de } M_1)\frac{12 - 4{,}8}{12} + (\text{l.i. de } M_2)\frac{4{,}8}{12};$$

$$\text{l.i. de } Q_{z_2} = \text{l.i. de } Q_{z_2}^{\text{vig}} + (\text{l.i. de } M_2 - \text{l.i. de } M_1)\frac{1}{l_2} =$$

$$= \text{l.i de } Q_{4,8}^{\text{vig}} + (\text{l.i. de } M_2 - \text{l.i. de } M_1)\frac{1}{12}.$$

En la fig. 329, *b*, han sido construidas las líneas de influencia de M^{vig} y Q^{vig} y, en la fig. 329, *c*, *d*, las de M y Q buscadas.

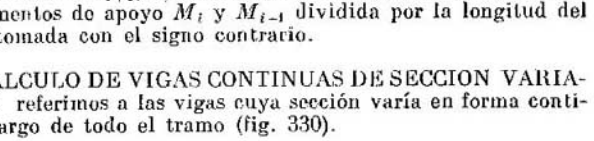
§ 154. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS REACCIONES DE APOYO. Las ecuaciones de las líneas de influencia de las reacciones de apoyo se obtienen de las expresiones (14.77) y (15.11).

$$\text{l.i. de } R_i = \text{l.i. de } A_{i+1}^{\text{vig}} + \text{l.i. de } B_i^{\text{vig}} + \\ + \frac{\text{l.i. de } M_{i+1} - \text{l.i. de } M_i}{l_{i+1}} - \frac{\text{l.i. de } M_i - \text{l.i. de } M_{i-1}}{l_i}. \quad (15.57)$$

La línea de influencia de la reacción de apoyo R_i puede ser construida sumando: 1) las líneas de influencia de la reacción izquierda A_{i+1}^{vig} del tramo $i+1$ y las de la reacción derecha B_i^{vig} del tramo i, para las vigas sobre dos apoyos; 2) la diferencia de las líneas de influencia de los momentos de apoyo M_{i+1} y M_i dividida por la longitud del tramo l_{i+1}; 3) la diferencia de las líneas de influencia de los momentos de apoyo M_i y M_{i-1} dividida por la longitud del tramo l_i, tomada con el signo contrario.

§ 155. CALCULO DE VIGAS CONTINUAS DE SECCION VARIABLE. Nos referimos a las vigas cuya sección varía en forma continua a lo largo de todo el tramo (fig. 330).

Fig. 330



1. CÁLCULO BAJO CARGA PERMANENTE

El cálculo de las vigas continuas de sección variable se efectúa sobre la base de las mismas ecuaciones canónicas (15.3) y (15.27) que el cálculo de las vigas con tramos de sección constante.

Multiplicamos la ecuación (15.3) por EJ_0, la rigidez de *cualquier* sección de la viga:

$$a_{i(i-1)}M_{i-1} + a_{ii}M_i + a_{i(i+1)}M_{i+1} + A_{ip} = 0, \quad (15.58)$$

donde

$$a_{i(i-1)} = \delta_{i(i-1)}EJ_0 = \int_0^{l_i} \frac{l_{i-z}}{l_i} \cdot \frac{z}{l_i} \cdot \frac{J_0}{J_i(z)}\, dz. \quad (15.59)$$

$$a_{ii} = a_{ii}^{\text{izq}} + a_{ii}^{\text{der}} = \delta_{ii}^{\text{izq}}EJ_0 + \delta_{ii}^{\text{der}}EJ_0 =$$

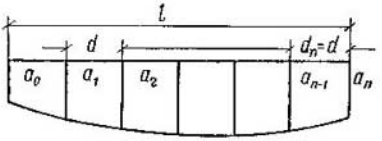
$$= \int_0^{l_i} \left(\frac{z}{l_i}\right)^2 \frac{J_0}{J_i(z)}\, dz + \int_0^{l_{i+1}} \left(\frac{l_{i+1}-z}{l_{i+1}}\right)^2 \frac{J_0}{J_{i+1}(z)}\, dz. \quad (15.60)$$

$$a_{i(i+1)} = \delta_{i(i+1)} EJ_0 = \int_0^{l_{i+1}} \frac{z}{l_{i+1}} \left(\frac{l_{i+1}-z}{l_{i+1}}\right) \frac{J_0}{J_{i+1}(z)}\, dz. \quad (15.61)$$

$$A_{iP} = \Delta_{iP} EJ_0 = \sum \int \overline{M}_i M_P \frac{J_0}{J(z)}\, dz. \quad (15.62)$$

Frecuentemente, las integrales en (15.59)—(15.62) no se toman en forma cerrada y, por lo común, se calculan con aproximación por las fórmulas (11.48), (11.49) o, en la forma matriz, por (11.58).

Fig. 331



Cuando los momentos flectores y de inercia varían continuamente por el tramo, la matriz A se puede construir dividiendo el tramo en un número par de partes de igual longitud d (fig. 331), en la forma siguiente:

$$A = \frac{d}{3EJ_0} \begin{Vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{Vmatrix}. \quad (15.63)$$

2. CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS DE APOYO

En este caso, las ecuaciones canónicas serán:

$$a_{i(i-1)} M_{i-1} + a_{ii} M_i + a_{i(i+1)} M_{i+1} + a_{iP} = 0. \quad (15.64)$$

Es cómodo efectuar su resolución por medio de los coeficientes de la matriz inversa

$$\begin{aligned} &\text{l.i. de } M_1 = \beta_{11} a_{1P} + \beta_{12} a_{2P} + \ldots + \beta_{1n} a_{nP} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\text{l.i. de } M_n = \beta_{n1} a_{1P} + \beta_{n2} a_{2P} + \ldots + \beta_{nn} a_{nP}. \end{aligned} \quad (15.65)$$

Aparte de las fórmulas (15.59) — (15.62), aquí, es cómodo calcular los coeficientes y términos independientes por medio de la

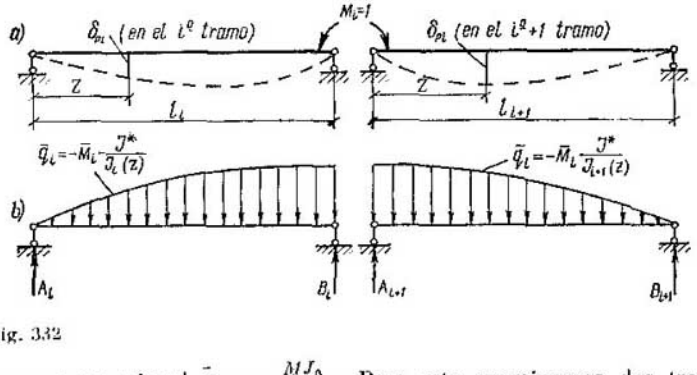


Fig. 332

carga convencional $\bar{q}=-\frac{MJ_0}{J(z)}$. Para esto examinamos dos tramos vecinos: el i-ésimo y el $(i+1)$-ésimo (fig. 332). Componemos la carga convencional $\bar{q}$ por los tramos y cargamos con ella las vigas convencionales que, en este caso, serán las mismas que las del sistema básico (fig. 332, *b*).

Recordamos que, en la viga convencional, los *momentos flectores* debidos a la carga convencional determinan a $a_{iP}=a_{pi}$ y, las *reacciones* de apoyo, los ángulos de giro en los extremos de la viga, aumentados en EJ_0 veces.

Para el peso en el i-ésimo tramo, los valores de a_{pi} se determinan por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2a_{pi}}{dz^2}=-\frac{\bar{M}_iJ_0}{J_i(z)}=-\frac{z}{l_i}\cdot\frac{J}{J_i(z)}. \qquad (15.66)$$

Las constantes arbitrarias de integración se determinan por las condiciones límites:

1) para $z=0$ $\quad a_{1i}=0.$

2) para $z=l_i$ $\quad a_{1i}=0.$

De la expresión de $a_{pi}(z)$ obtenida, tenemos al mismo tiempo que

$$\frac{da_{pi}(0)}{dz}=A_i=a_{i(i-1)i};\qquad \frac{da_{pi}(l_i)}{dz}=B_i=-a_{ii}^{izq} \qquad (15.67)$$

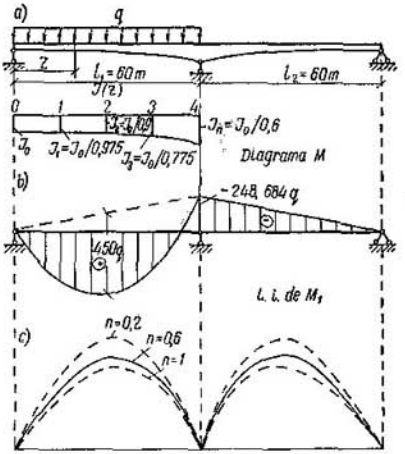
Para el peso en el $(i+1)$-ésimo tramo, los valores de a_{pi} se determinan por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2a_{pi}}{dz^2}=-\bar{M}_i\frac{J_0}{J_{i+1}(z)}=-\left(1-\frac{z}{l_{i+1}}\right)\frac{J_0}{J_{i+1}(z)}. \qquad (15.68)$$

También aquí, obtenemos

$$\frac{da_{pi}(0)}{dz}=A_{i+1}=a_{ii}^{der};\qquad \frac{da_{pi}(l_{i+1})}{dz}=B_{i+1}=-a_{(i+1)i}. \qquad (15.69)$$

Fig. 333



z →	0	l/4	l/2	3/4 l	l
Exacto	0	-4,03603	-6,29112	-5,26187	0
1 Aproximado	0	-4,04366	-6,3009	-5,2664	0
2 Idem	0	-4,03935	-6,2963	-5,26620	0

En aquellos casos, cuando las ecuaciones diferenciales (15.66)—(15.68) no son integrales, para el cálculo de a_{pl} es necesario emplear cargas elásticas.

Si se dividen los tramos en partes iguales, entonces, las matrices de las cargas elásticas W_q se pueden escribir por (11.107) u (11.108) y, la matriz de W_M por (11.114). La forma matriz de a_{pl} será

$$a_{pl} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{W}_q \ldots \boldsymbol{q},$$

$$\text{ó} \quad a_{pl} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{W}_M \cdot \overline{\boldsymbol{M}}_i. \qquad (15.70)$$

Ejemplo 45. Construir el diagrama de los momentos debidos a la carga uniforme en el primer tramo de la viga continua de la fig. 333 y la línea de influencia del momento de apoyo si, para el primer tramo,

$$J(z) = J_0 : \left[1 + b\left(\frac{z}{2l_1}\right)^2\right],$$

donde $b = -4\ (1 - n) = -1{,}6$; $n = J_0 : J_n = 0{,}6$; y J_n es el momento de inercia de la viga, en el apoyo.

1. Construcción del diagrama de momentos

La ecuación canónica es $a_{11}M_1 + A_{1P} = 0$. Por las fórmulas (15.60) y (15.62)

$$\frac{a_{11}}{2} = \int_0^{l_1} \left(\frac{z}{l_1}\right)^2 \left[1 + \frac{b}{4}\left(\frac{z}{l_1}\right)^2\right] dz = l_1\left(\frac{1}{3} + \frac{b}{20}\right); \qquad (15.71)$$

$$A_{1P} = \int_0^{l_1} \frac{z}{l_1} \cdot \frac{qz}{2}(l_1 - z)\left[1 + \frac{b}{4}\left(\frac{z}{l_1}\right)^2\right] dz = ql_1^3\left(\frac{1}{24} + \frac{b}{240}\right). \qquad (15.72)$$

Para nuestro caso,

$$\frac{a_{11}}{2} = 60\left(\frac{1}{3} - \frac{1{,}6}{20}\right) = 15{,}2;$$

$$A_{1P} = q \cdot 60^3\left(\frac{1}{24} - \frac{1{,}6}{240}\right) = 7\,560q.$$

El valor del momento de apoyo es $M_1 = -7\,560\ q : 30{,}4 = -248{,}6842q$. Efectuemos la resolución en la forma matriz y comparemos los resultados.

Para simplificar, dividimos el tramo de la viga en sólo cuatro partes y, para el cálculo de a_{11} y A_{1P}, empleamos la fórmula (11.59), uniendo cada dos partes en una y tomando la matriz de A por (11.60) y la de A_i por (11.56):

$$a_{11} = EJ_0\delta_{11} = EJ_0 \| \overline{M}'_{11}\, \overline{M}'_{21} \| A \| \{\overline{M}_{11}\overline{M}_{21}\} | =$$

$$= \| 0\ 0{,}25\ 0{,}50\ 0{,}50\ 0{,}75\ \ 1 \| \frac{30}{6} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 0{,}50 \\ 0{,}50 \\ 0{,}75 \\ 1{,}00 \end{Vmatrix}.$$

Desarrollamos la igualdad matriz de izquierda a derecha:

$$a_{11} = 5 \| 0\ \ 0{,}975\ \ 0{,}45\ \ 0{,}45\ \ 2{,}325\ \ 0{,}6 \| \cdot | \{0\ \ 0{,}25\ \ 0{,}50\ \ 0{,}50\ \ 0{,}75\ \ 1\} |;$$

$$a_{11} = 5\,(0 + 0{,}24375 + 0{,}2250 + 0{,}2250 + 1{,}74375 + 0{,}6) = 5 \cdot 3{,}0375 =$$

$$= 15{,}1875 \text{ (el valor exacto es } 15{,}2).$$

$$A_{1P} = EJ_0\Delta_{1P} = EJ_0 | | \overline{M}'_{11}\, \overline{M}'_{21} \| A \| \{M_{1P} M_{2P}\} |.$$

0, teniendo en cuenta, al hacer el cálculo de a_{11}, el resultado de la multiplicación de la matriz de línea por la matriz de A, obtenemos:

$$A_{1P} = 5 \| 0\ \ 0{,}975\ \ 0{,}45\ \ 0{,}45\ \ 2{,}325\ \ 0{,}6 \| \cdot | \{0\ \ 337{,}5q\ \ 450q\ \ 450q\ \ 337{,}5q\ \ 0\} | =$$

$$= 5\,(0 + 329{,}0625 + 202{,}5 + 202{,}5 + 784{,}6875)q = 7593{,}75q.$$

El valor del momento de apoyo es $M_1 = -7593{,}75\ q : 30{,}375 = -250q$ (el valor exacto es $M_1 = -248{,}6842q$).

A pesar de los buenos resultados del cálculo aproximado, en el caso particular dado, obtenidos dividiendo el tramo en cuatro partes, de todos modos, en la práctica de cálculo, es necesario dividir el tramo en un número de partes mayor, en 8—12 por lo menos.

2. Construcción de la línea de influencia del momento de apoyo M_1

Componemos la ecuación diferencial (15 66):

$$\frac{d^2a_{P1}}{dz^2} = -\frac{\overline{M}_1 J_0}{J_1(z)} = -\frac{z}{l_1}\left(1 + \frac{b}{4}\cdot\frac{z^2}{l_1^2}\right).$$

La integramos dos veces:

$$\frac{da_{P1}}{dz} = -\frac{1}{l_1^2}\left(l_1^2\frac{z^2}{2} + \frac{b}{4}\,l_1^2\frac{z^4}{4}\right) + C_1,$$

$$a_{P1} = -\frac{1}{l_1^2}\left(l_1^2\frac{z^3}{6} + \frac{bl_1^2 z^5}{80}\right) + C_1 z + D_1.$$

Determinamos las constantes de integración por las condiciones:

1) para $z = 0$ $\quad a_{P1} = 0$

2) para $z = l_1$ $\quad a_{P1} = 0$ $\Big\}$, lo que determina $D_1 = 0$ y

$$C_1 = -\frac{l_1^2}{6} - b\frac{l_1^4}{80}.$$

Ahora podemos escribir

$$a_{P1} = l_1^3 [f_1(u) + b f_2(u)], \tag{15.73}$$

donde,

$$f_1(u) = \frac{1}{6}(u - u^3);$$

$$f_2(u) = \frac{1}{80}(u - u^5).$$

Componemos la derivada de (15.73)

$$\frac{da_{P1}}{dz} = l_1 \left[\frac{1}{6}(1 - 3u^2) + \frac{b}{80}(1 - 5u^4) \right].$$

Para $z = l_1$ y $u = 1$,

$$a_{11} = -\frac{da_{P1}(l_1)}{dz} = l_1 \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{20} \right).$$

Esta expresión coincide con (15.71).
Para nuestro caso,

$$a_{P1} = 60^3 [f_1(u) - 1{,}6 f_2(u)].$$

La ecuación de la línea de influencia del momento de apoyo es

$$\text{l.i. de } M_1 = -\frac{a_{P1}}{a_{11}} = -\frac{3\,600 [f_1(u) - 1{,}6 f_2(u)]}{30{,}4}.$$

Por esta expresión fueron calculadas las ordenadas de la línea de influencia construida en la fig. 333, *c*. Construimos, ahora, la línea de influencia del momento de apoyo, por medio de los pesos elásticos. La forma matriz, por (11.120), es:

$$a_{P1} = EJ_0 B \cdot W_M \cdot \overline{M}_1.$$

Calculamos, al principio, el vector de los pesos elásticos, utilizando la matriz (11.114):

$$W_M \overline{M}_1 = -\frac{15}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} 2 & 0{,}975 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3{,}90 & 0{,}90 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}975 & 3{,}60 & 0{,}775 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}90 & 3{,}10 & 0{,}60 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}775 & 1{,}20 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -0{,}609375 \dfrac{1}{EJ_0} \\ -3{,}5625 \dfrac{1}{EJ_0} \\ -6{,}5625 \dfrac{1}{EJ_0} \\ -8{,}4375 \dfrac{1}{EJ_0} \\ -4{,}453125 \dfrac{1}{EJ_0} \end{Vmatrix}.$$

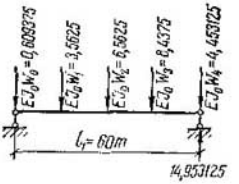
La viga convencional con pesos elásticos se expone en la fig. 334.
Ahora calculamos a_{P1}. La matriz de influencia de los pesos elásticos,

se toma considerando que los pesos elásticos positivos están dirigidos hacia arriba:

$$a_{P1}=\delta_{P1}EJ_0=-60/16\begin{Vmatrix}0&0&0&0&0\\0&3&2&1&0\\0&2&4&2&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-0{,}609375\\-3{,}5625\\-6{,}5625\\-8{,}4375\\-4{,}453125\end{Vmatrix}=$$

$$=|\{0\ \ 120{,}9375\ \ 188{,}4375\ \ 157{,}5\ \ 0\}|.$$

Fig. 334



Calculamos $a_{11}/2$, en la forma matriz, por medio de los pesos elásticos, como la reacción del apoyo derecho en la viga convencional, debida a dichos pesos:

$$a_{11}/2=QW=$$
$$=-|\{0\ \ 1/4\ \ 1/2\ \ 3/4\ \ 1\}|\cdot|\{-0{,}609375-3{,}5625-6{,}5625-8{,}4375-4{,}453125\}|=$$
$$=14{,}953125 \text{ (el valor exacto es } 15{,}20).$$

Las ordenadas de la l.i. de $M_1=-\dfrac{a_{P1}}{a_{11}}$ calculadas, están incriptas en la fig. 333, *c*. Calculamos los pesos elásticos por la matriz (11.118) que es más exacta:

$$W_M\overline{M}_1=-\frac{15}{12}\begin{Vmatrix}3{,}5&2{,}925&-0{,}45&0&0\\1&9{,}75&0{,}90&0&0\\0&0{,}975&9&0{,}775&0\\0&0&-0{,}90&7{,}750&0{,}6\\0&0&-0{,}45&2{,}325&2{,}10\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0\\1/4\\1/2\\3/4\\1\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}-0{,}6328125\,\dfrac{1}{EJ_0}\\-3{,}609375\,\dfrac{1}{EJ_0}\\-6{,}656250\,\dfrac{1}{EJ_0}\\-8{,}578125\,\dfrac{1}{EJ_0}\\-4{,}5234375\,\dfrac{1}{EJ_0}\end{Vmatrix}.$$

Calculamos $a_{P1}=\delta_{P1}EJ_0$.

$$a_{P1}=-\frac{15}{4}\begin{Vmatrix}0&0&0&0&0\\0&3&2&1&0\\0&2&4&2&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-0{,}6328125\\-3{,}609375\\-6{,}656250\\-8{,}578125\\-4{,}5234375\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0\\122{,}6953125\\191{,}25\\159{,}9609375\\0\end{Vmatrix}.$$

Fig. 335

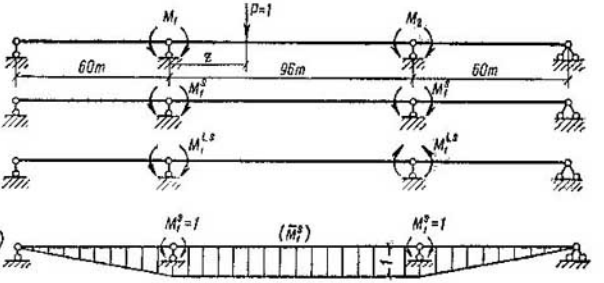
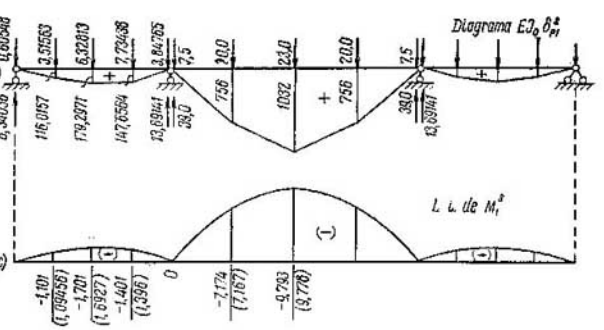


Fig. 336



Calculamos $a_{11}/2$, como fuerza transversal

$$\frac{a_{11}}{2} = -\|0 \;\; 0{,}25 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}75 \;\; 1\|\cdot|\{-0{,}6328125 - 3{,}609375 - 6{,}65625 - 8{,}578125 - 4{,}5234375\}| = 15{,}1875 \text{ (el valor exacto es } 15{,}20).$$

En la fig. 333, *c*, se exponen las ordenadas de la l. i. de $M_1 = -\frac{a_{1\,1}}{a_{11}}$.

Ejemplo 46. Construir las líneas de influencia de los momentos de apoyo en la viga continua de la fig. 330, al variar los momentos de inercia según las leyes:

$$\text{en el primer tramo } J(z) = J_0 : \left[1 + b\left(\frac{z}{2l_1}\right)^2\right];$$

$$\text{en el segundo tramo } J(z) = J_0 : \left[1 + b\left(\frac{l_2}{2} - z\right)^2\right];$$

$$b = 4(n-1), \qquad n = \frac{J_0}{J_{ap}} = 0{,}5.$$

Efectuamos la resolución aproximada por los pesos elásticos en la forma matriz empleando la simetría de la viga. El sistema básico y el agrupamiento de los momentos de apoyo incógnitos se exponen en la fig. 335. Las ecuaciones canónicas son:

$$a_{11}^s M_1^s + a_{1P}^s = 0; \tag{a}$$

$$a_{11}^{1.s} M_1^{1.s} + a_{1P}^{1.s} = 0. \tag{b}$$

Para simplificar los cálculos dividimos cada tramo de la viga *sólo* en cuatro partes (se recomienda en 8—12). Componemos las matrices de los pesos elásticos por la fórmula (11.114).

1. La incógnita simétrica M_1^s *(fig. 336)*

En el primer tramo, la matriz de los pesos elásticos es:

$$EJ_0\vec{W} = \frac{-15}{6}\begin{Vmatrix} 2 & 0{,}96875 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3{,}875 & 0{,}875 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}96875 & 3{,}50 & 0{,}71875 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}875 & 2{,}875 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}71875 & 1{,}0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0{,}60548 \\ -3{,}51563 \\ -6{,}32813 \\ -7{,}73438 \\ -3{,}84765 \end{Vmatrix}. \quad (c)$$

En el segundo tramo, la matriz de los pesos elásticos es:

$$EJ_0\vec{W} = \frac{-24}{6}\begin{Vmatrix} 1 & 0{,}875 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 3{,}50 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}875 & 4 & 0{,}875 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3{,}50 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}875 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -7{,}5 \\ -20{,}0 \\ -23{,}0 \\ -20{,}0 \\ -7{,}5 \end{Vmatrix}. \quad (d)$$

La viga convencional, que en la viga continua coincide con el sistema básico, se da en la fig. 336, *b*, donde se indican también los pesos elásticos aumentados en EJ_0 veces. En dicha figura se muestran las reacciones de apoyo provocadas por los pesos elásticos y el diagrama de momentos debido a estos pesos e igual a $EJ_0\delta_{P1}^s$.

La suma de las reacciones en el primer apoyo intermedio (véase el § 109) da

$$\frac{a_{11}^s}{2} = EJ_0\frac{\delta_{11}^s}{2} = 13{,}69141 + 39 = 52{,}69141 \text{ (el valor exacto es 54.00).}$$

Dividiendo las ordenadas $EJ_0\delta_{P1}^s$ por $a_{11}^s = 105{,}38282$, según (a), obtenemos las ordenadas de la línea de influencia de la incógnita simétrica (fig. 336, *c*). En esta misma figura, para confrontar los resultados, se dan entre paréntesis las ordenadas de la l.i. obtenidas por el cálculo exacto.

2. La incógnita de simetría inversa $M_1^{i.s}$ *(fig. 337)*

La matriz (c) de los pesos elásticos para el primer tramo se conserva también aquí. La matriz de los pesos elásticos, para el segundo tramo (el del medio), es:

$$EJ_0\vec{W} = \frac{-24}{6}\begin{Vmatrix} 1 & 0{,}875 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 3{,}50 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}875 & 4 & 0{,}875 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3{,}50 & 0{,}50 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}875 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5{,}75 \\ -9{,}00 \\ 0 \\ +9{,}00 \\ +5{,}75 \end{Vmatrix}. \quad (e)$$

La viga convencional con los pesos elásticos aumentados en EJ_0 veces, las reacciones debidas a ellos y el diagrama de momentos flectores iguales a $EJ_0\delta_{P1}^{i.s}$, se muestran en la fig. 337, *b*. Por ella tenemos que

$$\frac{a_{11}^{i.s}}{2} = 13{,}69141 + 10{,}25 = 23{,}94141.$$

Dividiendo las ordenadas $EJ_0\delta_{P1}^{i.s}$ por $a_{11}^{i.s} = 47{,}88282$, obtenemos la línea de influencia de la incógnita inversamente simótrica $M_1^{i.s}$ (fig. 337, *c*).

La línea de influencia del momento de apoyo en el primer apoyo intermedio se muestra en la fig. 338.

$$M_1 = M_1^s + M_1^{i.s}$$

Fig. 337

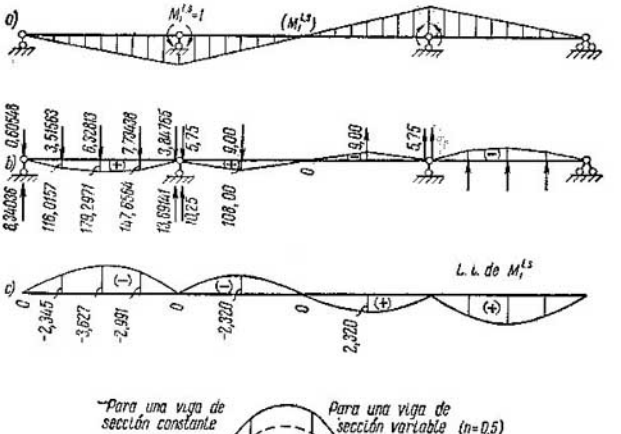


Fig. 338

En esta misma figura, en punteado, se muestra la l.i. para una viga de sección constante.

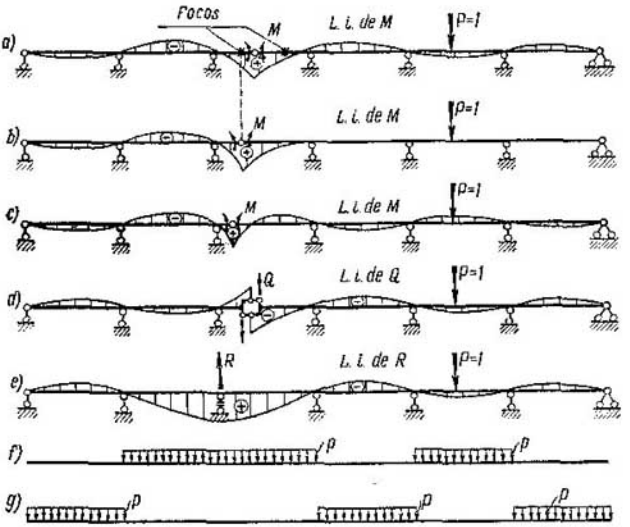
§ 156. FORMAS DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE M, Q Y R Y POSICIONES TEORICAS O DE CALCULO DE LA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA. La forma de las líneas de influencia puede ser hallada, en muchos casos, por el método cinemático. En la fig. 339 se han trazado las configuraciones aproximadas de las líneas de influencia de los momentos flectores, las fuerzas transversales y las reacciones de apoyo.

Las líneas de influencia de los momentos flectores pueden ser de tres tipos: para las secciones entre los focos (fig. 339, *a*); para las secciones en los focos (las izquierdas en la fig. 339, *b*) y para las secciones entre los apoyos y los focos (fig. 339, *c*).

En la fig. 339, *d* se han trazado las líneas de influencia de las fuerzas transversales y, en la 339, *e*, las de las reacciones de apoyo.

Para la obtención de los valores de cálculo positivos de M, Q y R, es necesario colocar la carga p sobre las partes positivas de las líneas de influencia y, para la obtención de los negativos, sobre las partes negativas.

Fig. 339



Por ejemplo, para la obtención del valor de cálculo positivo de la reacción R, la carga deberá ser ubicada en correspondencia con la fig. 339, *f* y, para la del negativo, en correspondencia con la 339, *g*.

CAPITULO XVI * CALCULO DE ARMADURAS ARTICULADAS PLANAS HIPERESTATICAS Y DE SISTEMAS COMBINADOS POR EL METODO DE FUERZAS

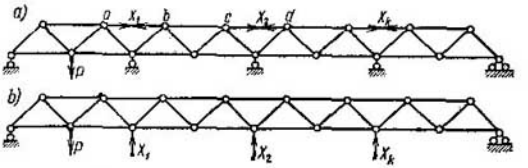
§ 157. GRADO DE INDETERMINACION ESTATICA Y SISTEMA BASICO. Las barras y los vínculos de apoyo de las armaduras hiperestáticas se dividen en: imprescindibles, cuya eliminación torna al sistema inestable, y superfluas, todas las restantes. Como es sabido, las fuerzas longitudinales de las barras imprescindibles y las reacciones de los vínculos de apoyo imprescindibles son isostáticas.

El grado de indeterminación estática de las armaduras articuladas se determina por la fórmula deducida de (2.9):

$$n = B + V_{ap} - 2N. \qquad (16.1)$$

Al sistema básico para el cálculo de armaduras lo formaremos sólo con el seccionamiento (no con la eliminación) de las barras superfluas y la eliminación de los vínculos de apoyo. También seccionaremos los vínculos de apoyo al calcular la dislocación de los apoyos. En las barras seccionadas de la armadura consideraremos que las fuerzas longitudinales incógnitas son positivas, si son de tracción.

Fig. 340



El sistema básico obtenido únicamente con el seccionamiento de las barras de la armadura, en muchos casos, resulta más cómodo que el obtenido eliminando los vínculos de apoyo. Por ejemplo, el primer sistema básico (fig. 340, *a*) es más cómodo que el segundo (fig. 340, *b*) porque en él, en muchas barras, las fuerzas longitudinales debidas a la carga son iguales a cero, lo que no sucede, en el segundo. Además, en el primer sistema básico, en algunas barras, las fuerzas longitudinales debidas a $X_1 = 1$, también, son iguales a cero. Por eso, por ejemplo, el desplazamiento $\delta_{13} = 0$. Todo esto, al hacer el cálculo de una armadura por la primer variante del sistema básico, disminuye la cantidad de cálculos.

§ 158. ECUACIONES CANONICAS. Para el cálculo de una armadura a la carga, a la acción de la temperatura, a la dislocación de los apoyos y a la tracción de las barras de longitud incorrecta, la k-ésima ecuación canónica general, según (14.5) tiene la forma

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} = 0, \qquad (16.2)$$

donde,

$$\delta_{km} = \sum \frac{\overline{N}_{ik}\overline{N}_{im}}{E_i F_i} l_i; \qquad \Delta_{kP} = \sum \frac{\overline{N}_{ik}N^0_{iP}}{E_i F_i} l_i;$$

$$\Delta_{kt} = \sum \overline{N}_{ik}\Delta l_{it} = \sum \overline{N}_{ik}\beta t_i l_i;$$

$$\Delta_{k\Delta} = \sum \overline{N}_{ik}\Delta s_{im} - \sum \overline{R}_k \Delta_m,$$

donde Δs_{im} es la diferencia entre las longitudes real y necesaria de la i-ésima barra.

La ecuación (16.2), a base de (11.39), se puede escribir así:

$$\Delta_k = \sum \frac{\overline{N}_{ik}N_{iP}}{E_i F_i} l_i + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} = 0, \qquad (16.3)$$

donde

$$N_{iP} = \overline{N}_{i1}X_1 + \overline{N}_{i2}X_2 + \ldots + N^0_{iP}. \qquad (16.4)$$

Tabla 9

Barras	l_i en m	F_i en m²	$\frac{l_i}{F_i}$ en m⁻¹	$\overline{N}_{i1}$
1-2	5	0,0070	714,290	0,625
2-3	5	0,0130	384,615	—0,625
1-3	8	0,0056	142,860	—0,500
2-4	$\frac{8}{2}$	0,0048	833,333	1,000

Barras	$\overline{N}_{i1}^2$	$\overline{N}_{i1}^2 \frac{l_i}{F_i}$ en m⁻¹	N_{iP} en tf	$\overline{N}_{i1}N_{iP}$ en tf	$\overline{N}_{i1}\overline{N}_{iP}\frac{l_i}{F_i}$ en tf/m
1-2	0,390625	279,02	—100	—62,5	—44643,0
2-3	0,390625	150,24	—100	62,5	24038,4
1-3	0,250000	357,15	80	—40,0	—57144,0
2-4	1,000000	833,33	0	0	0
$\sum$ para la mitad de la estructura		1619,74 m⁻¹			—77748,6 tf/m

Expresemos esta ecuación en función de la tensión σ_i en cualquier i-ésima barra de la armadura:

$$\sum \frac{\overline{N}_{ik}}{E_i}\sigma_i l_i + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} = 0. \qquad (16.5)$$

La suma se efectúa por todas las barras de la armadura.

Si un sistema básico, formado únicamente con el seccionamiento de las barras, con el calentamiento o enfriamiento uniforme, permanece semejante a sí mismo, entonces, todos los desplazamientos $\Delta_{kt}=0$ y, las tensiones térmicas en las barras de la armadura, son, también, iguales a cero. Por consiguiente, para tales armaduras, tiene lugar la identidad

$$\sum \overline{N}_{ik} l_i \equiv 0.$$

Ejemplo 47. Determinar la fuerza longitudinal en la barra 2-4 de la armadura de la fig. 341.

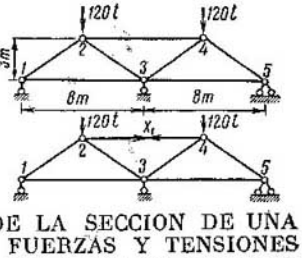
La ecuación canónica es $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$.

Los cálculos preliminares se dan en la tabla 9.

De la tabla obtenemos que:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{77748,6 \cdot 2}{1619,74 \cdot 2} = 48,00 \text{ tf}.$$

Fig. 341



§ 159. INFLUENCIA DEL AREA DE LA SECCION DE UNA BARRA SUPERFLUA SOBRE LAS FUERZAS Y TENSIONES LONGITUDINALES. Al actuar una carga, las fuerzas y tensiones longitudinales en las barras superfluas de las armaduras hiperestáticas dependen de las relaciones de las áreas de todas las barras superfluas de la armadura y, bajo la acción de la temperatura y las dislocaciones de los apoyos, dependen de las magnitudes de las áreas de las secciones de estas barras. De ahí la importancia de conocer cómo variarán las fuerzas y tensiones longitudinales al variar las áreas de las secciones de algunas barras.

Aceptemos que n sea el grado de indeterminación estática de la armadura y m el número de sus barras. Aclaremos cómo variará la fuerza longitudinal en la barra k en dependencia de la variación del área de la sección de esta barra. Seccionando la barra k, en la que el área de la sección es variable, formamos el sistema básico $n - 1$ veces hiperestático.

La ecuación canónica es

$$\delta_{kk}^{(n-1)} X_k + \Delta_{kP}^{(n-1)} + \Delta_{kt}^{(n-1)} + \Delta_{k\Delta}^{(n-1)} = 0.$$

Presentamos la magnitud $\delta_{kk}^{(n-1)}$ como la suma de dos sumandos

$$\delta_{kk}^{(n-1)} = \sum_{1}^{m-1} \frac{\overline{N}_{ik}^2 l_i}{E_i F_i} + \frac{1^2 \cdot l_k}{E_k F_k} = A + \frac{l_k}{E_k F_k}.$$

Por consiguiente:

$$X_k = -\frac{\Delta_{kP}^{(n-1)} + \Delta_{kt}^{(n-1)} + \Delta_{k\Delta}^{(n-1)}}{A + \dfrac{l_k}{E_k F_k}}. \qquad (16.6)$$

En la barra seccionada k, la fuerza longitudinal debida a la carga es igual a cero, por eso, ni el desplazamiento $\Delta_{kP}^{(n-1)}$, ni los desplazamientos $\Delta_{kt}^{(n-1)}$ y $\Delta_{k}^{(n-1)}$ dependen del área de la sección F_k de esta k-ésima barra. De ahí, que

1) con el aumento del área de la sección F_k, de la barra k examinada, **aumenta** la fuerza longitudinal, en ella, y con la disminución, **disminuye** respectivamente;

2) el aumento y la disminución de la fuerza longitudinal posee límites:

para $F_k \to 0 X_k \to 0$; para $F_k \to \infty X_k \to -\dfrac{\Delta_{kP}^{(n-1)} + \Delta_{kt}^{(n-1)} + \Delta_{k\Delta}^{(n-1)}}{A}$;

3) por cuanto $\delta_{kk}^{(n-1)}$ y, por consiguiente, también, el denominador (16.6), son siempre positivos, entonces, el signo de la fuerza longitudinal X_k depende sólo del signo del numerador (16.6) $\Delta_{kP}^{(n-1)} + \Delta_{kl}^{(n-1)} + \Delta_{k\Delta}^{(n-1)}$ y, éste, no depende del área de la sección F_k. Esto significa que la *variación del área de la sección F_k no influye sobre el signo de la fuerza longitudinal* en esta barra. Con otras palabras, si las áreas de las secciones de todas las barras restantes son conocidas y la barra dada es traccionada o comprimida, entonces, con la variación del área de la sección *de esta sola barra*, no podemos cambiar el signo de la fuerza longitudinal.

La tensión en la barra examinada k es igual a:

$$\sigma_k = \frac{X_k}{F_k} = -\frac{\Delta_{kP}^{(n-1)} + \Delta_{kl}^{(n-1)} + \Delta_{k\Delta}^{(n-1)}}{F_k A + \frac{l_k}{E_k}}.$$

$$\text{Para } F_k \to 0, \quad \sigma_k = -\frac{E_k (\Delta_{kP}^{(n-1)} + \Delta_{kl}^{(n-1)} + \Delta_{k\Delta}^{(n-1)})}{l_k}$$

y para $F_k \to \infty$, $\sigma_k = 0$.

De esta manera:

1) al aumentar el área de la sección F_k disminuye la tensión en la barra y, cuando $F_k = \infty$ ella es igual a cero;

2) al disminuir el área de la sección de la barra hasta cero, la tensión aumenta hasta el valor

$$\sigma_k = -\frac{E_k (\Delta_{kP}^{(n-1)} + \Delta_{kl}^{(n-1)} + \Delta_{k\Delta}^{(n-1)})}{l_k};$$

3) el signo de la tensión, como también el de la fuerza longitudinal, no depende del área F_k.

La variación del área de la sección de una barra k, trae consigo la variación de las fuerzas longitudinales de todas las barras restantes de la armadura.

Para investigar la fuerza longitudinal en cualquier i-ésima barra de una armadura, una al variar el área de la sección de la k-ésima barra, escribimos la fuerza longitudinal N_{iP} en la siguiente forma:

$$N_{iP} = \overline{N}_{ik}^{(n-1)} X_k + N_{iP}^{(n-1)},$$

siendo que $\overline{N}_{ik}^{(n-1)}$ y $N_{iP}^{(n-1)}$ no dependen del área F_k.

Por esta razón, al aumentar el área F_k, aumentará en valor absoluto el primer sumando N_{iP}, y al disminuirla, disminuirá también el primer sumando. Si el signo del primer sumando $\overline{N}_{ik}^{(n-1)} X_k$ es contrario al del segundo sumando, entonces, en algunos casos aislados, variando el área de la sección de la k-ésima barra se puede lograr que la fuerza longitudinal en la i-ésima barra cambie de signo. Pero si los signos son iguales, entonces, no es posible cambiar el signo de la fuerza longitudinal de la i-ésima barra variando el área de la k-ésima barra.

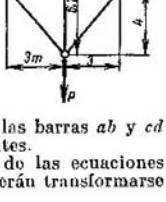
§ 160. ARMADURA DE RESISTENCIA UNIFORME

Se llama armadura de resistencia uniforme a aquella, en la que, al aumentar la carga del tipo dado, el estado límite o extremo comienza en todas las barras simultáneamente. En cada barra de tal armadura el material será utilizado plenamente, o sea, en ella, las tensiones serán extremas.

En una armadura isostática, las fuerzas longitudinales no dependen del área de las secciones y, por eso, las armaduras isostáticas pueden ser de resistencia uniforme en todos los casos. En una armadura hiperestática, el asunto es diferente. En ella, las fuerzas longitudinales dependen de las áreas de las secciones. Por eso, la armadura hiperestática, sólo en casos raros puede ser de resistencia uniforme.

Efectivamente, si en todas las barras no seccionadas, de cierto sistema básico (fig. 340, *a*), las tensiones son iguales a las límites (σ_i), entonces, los dislocamientos recíprocos de los nudos *a* y *b*, *c* y *d*, y otros, serán totalmente determinados. Por eso, los alargamientos elásticos relativos de las barras *ab*, *cd* y otras y, por consiguiente, las tensiones en ellas, son también absolutamente determinadas. Ellas sólo dependen del esquema de la armadura y de los alargamientos (tensiones) de las barras no seccionadas del sistema básico y, como norma, no son iguales a las tensiones límites para sus barras seccionadas.

Fig. 342



Sólo en casos exclusivos, los alargamientos relativos de las barras *ab* y *cd* serán tales que, también en ellas, las tensiones serán límites.

Los razonamientos expuestos se desprenden, también, de las ecuaciones canónicas (16.5), las cuales, para tensiones extremas (σ_i) deberán transformarse en una identidad

$$\frac{\overline{N}_{ik}(\sigma_i)}{E_i} l_i + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} \equiv 0. \qquad (16.7)$$

Estas identidades son las condiciones de la uniformidad de resistencia de las armaduras. Por ellas se ve que las armaduras de resistencia uniforme se determinan sólo por el esquema de la armadura y las tensiones límites.

La armadura que se expone en la fig. 341 será de resistencia uniforme si las tensiones límites, para las barras traccionadas y comprimidas, son iguales en valor absoluto. Para esta armadura,

$$\sum \frac{\overline{N}_{i1}(\sigma_i) l_i}{E_i} = \frac{2}{E}\left[\frac{5}{8}(-\sigma)5 - \frac{1}{2}(\sigma)8 - \frac{5}{8}(-\sigma)5 + 1(\sigma)\frac{8}{2}\right] = 0.$$

La condición (16.7) se cumple, lo que significa que, con tales datos, esta armadura puede ser de resistencia uniforme.

La armadura expuesta en la fig. 342, si las tensiones límites, de tracción y compresión, son iguales entre sí, también puede ser de resistencia uniforme. Para ella tenemos que

$$\sum \overline{N}_{i1}(\sigma_i) l_i = -\frac{5}{8}(\sigma)5 + 1(\sigma)6{,}25 - \frac{5}{8}(\sigma)5 = 0.$$

Si es imposible obtener una armadura de resistencia uniforme con las tensiones límites en todas las barras, entonces, en una o varias de éstas es necesario disminuir las tensiones en valor absoluto, a fin de que se cumpla la igualdad (16.7).

Mostremos cómo se hace esto en una armadura monohiperestática, para la cual, deberá cumplirse la igualdad

$$\sum \frac{\overline{N}_{i1}(\sigma_i)\, l_i}{E_i} + \Delta_{1t} + \Delta_{1\Delta} = 0. \qquad (16.8)$$

Aceptemos que, para las tensiones límites fijadas, sea

$$\sum \frac{\overline{N}_{i1}(\sigma_i)\, l_i}{E_i} + \Delta_{1t} + \Delta_{1\Delta} \neq 0.$$

Los sumandos bajo el signo de suma pueden ser positivos o negativos. Sea que en s barras las expresiones $\overline{N}_{i1}(\sigma_i)\, l_i$ son positivas y en las restantes $(m-s)$, negativas

$$\sum^{s} \frac{\overline{N}_{i1}(\sigma_i)\, l_i}{E_i} + \sum^{m-s} \frac{\overline{N}_{i1}(\sigma_i)\, l_i}{E_i} + \Delta_{1t} + \Delta_{1\Delta} \gtrless 0. \qquad (16.9)$$

Si el primer miembro de (16.9) es mayor de cero, entonces, en una o varias barras de la cantidad s es necesario disminuir la tensión, en valor absoluto, de modo que la desigualdad (16.9) se convierta en la igualdad (16.8). Pero si el primer miembro es menor de cero, entonces, es necesario hacer lo mismo, pero, para las barras de la cantidad $(m-s)$.

De tal modo, siempre es posible hallar una armadura calculada bajo una carga, a la acción de la temperatura, a la dislocación de los apoyos y a la tensión de las barras de longitud incorrecta, en la cual, para las condiciones dadas, las tensiones en una o varias de sus barras, sean menores que las límites.

En las armaduras de doble indeterminación, en el caso general, se han de reducir las tensiones en no menos de dos barras. En este caso, la disminución de la tensión en las dos barras se halla por las dos ecuaciones del tipo (16.9).

§ 161. DOS PROCEDIMIENTOS PARA CALCULAR ARMADURAS HIPERESTATICAS. El cálculo de armaduras tiene por finalidad determinar o las tensiones en las barras (cálculo de control) o las medidas de sus secciones (cálculo de las dimensiones). En ambos casos es necesario conocer las fuerzas longitudinales en todas las barras de la armadura. Para el cálculo de control, deberán ser conocidas las secciones transversales de las barras y, para el de las dimensiones, las tensiones que pueden ser admitidas en ellas, es decir, las resistencias teóricas R_i (tensiones admisibles). La determinación de las tensiones y la elección de las secciones se efectúa por medio de las fórmulas conocidas

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}, \quad F_i = \frac{N_i}{R_i}.$$

De esta manera, si la armadura tiene B barras, entonces, para el cálculo completo es indispensable conocer $2B + V_{ap}$ de diferentes magnitudes: las B de las fuerzas longitudinales, las B de las áreas o tensiones y los V_{ap} de las reacciones de apoyo.

En las armaduras isostáticas, si se desprecia el peso propio o se tiene en cuenta aproximadamente, las fuerzas longitudinales no dependen del área de las secciones de las barras. Por eso, las fuerzas longitudinales en todas las B barras de la armadura y todas las reacciones de apoyo V_{ap}, pueden ser determinadas por las ecuaciones de la estática. Esto significa que deben ser conocidas las áreas de las secciones de todas las B barras o las resistencias teóricas o unas y otras al mismo tiempo, pero, con la cantidad general B.

En las armaduras hiperestáticas, donde las fuerzas longitudinales dependen de las áreas de las secciones, la cuestión es diferente. Veamos cuáles ecuaciones pueden ser empleadas en el cálculo de una armadura n veces hiperestática.

1. Las ecuaciones de equilibrio, en cantidad $B - n + V_{ap}$, que contienen solamente fuerzas.

2. Las ecuaciones canónicas de los desplazamientos, en cantidad n, que contienen las fuerzas $X_1, \ldots, X_n$ y las áreas de las secciones de todas las barras (16.2) o las tensiones en ellas (16.5).

De esta manera, las $B + V_{ap}$ ecuaciones son insuficientes para determinar todas las $2B + V_{ap}$ magnitudes incógnitas, y el problema es indeterminable. Para su resolución es imprescindible tener B ecuaciones complementarias.

Si prefijamos las áreas de las secciones de todas las B barras de la armadura, entonces, las ecuaciones canónicas contendrán sólo fuerzas longitudinales. Entonces, las $B + V_{ap}$ ecuaciones determinarán a $B + V_{ap}$ fuerzas longitudinales en las barras de la armadura y reacciones de apoyo y, el problema se torna determinable. Después de haber determinado las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$ por las ecuaciones canónicas, las fuerzas longitudinales en las barras restantes pueden ser halladas por la expresión (16.4). Hemos llegado *a la forma usual del método de fuerzas.*

Pero si fijamos, arbitrariamente, las tensiones en todas las B barras de la armadura, entonces, en primer lugar, las ecuaciones canónicas (16.5) pueden no ser satisfechas y, en segundo lugar, incluso, si lo son, de todas maneras, las fuerzas longitudinales de las barras de la armadura no podrán ser halladas, dado que las ecuaciones de la estática son insuficientes para ello. Por consiguiente, tampoco podrán ser halladas las áreas de las secciones de las barras. Por eso, es indispensable darse los n valores de las fuerzas longitudinales en las barras superfluas (comúnmente seccionadas) de la armadura, a fin de que las ecuaciones de la estática sean suficientes para la determinación de las restantes fuerzas longitudinales y reacciones de apoyo incógnitas. Además, es indispensable fijar $B - n$ valores de las tensiones en las restantes barras de la armadura, para que de las ecuaciones canónicas (16.5) sea posible determinar las tensiones en las n barras, donde nos hemos dado las fuerzas longitudinales.

Tal forma de cálculo, por cuanto las ecuaciones canónicas contendrán las tensiones incógnitas, se llama *método de tensiones.* Si al problema se le agregan cualesquiera condiciones complementarias, por ejemplo, la del mínimo volumen de armadura, las cuales se expresan con ecuaciones complementarias, entonces, el número de magnitudes independientes que nos damos disminuye.

§ 162. MÉTODO DE TENSIONES. Las ecuaciones (16.5) son, para todos los valores de k, ecuaciones canónicas del método de tensiones, útiles, en principio, para cualquier sistema básico. Pero ellas son cómodas, únicamente, cuando el sistema básico ha sido

escogido *seccionando sólo las barras superfluas de la armadura*. En tales casos, las ecuaciones canónicas serán sueltas, o sea, cada una de ellas contendrá, sólo, una tensión incógnita en la barra seccionada.

De esto nos podemos convencer, presentando la ecuación canónica (16.5) en una nueva forma, que emplearemos, en adelante, sacando del signo de suma el sumando relacionado con la k-ésima barra seccionada:

$$\sum_{\text{no sec}} \frac{\overline{N}_{ik}}{E_i} \sigma_i l_i + \frac{1 \cdot \sigma_k l_k}{E_k} + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} = 0, \qquad (16.10)$$

donde σ_k es la tensión buscada en la k-ésima barra seccionada y,

$\overline{N}_{ik}$, las fuerzas longitudinales unitarias en la i-ésima barra no seccionada del sistema básico, debidas a la fuerza de tracción $X_k = 1$.

Por cuanto en las barras seccionadas del sistema básico, las fuerzas longitudinales debidas a $X_k = 1$ son iguales a cero, entonces, la suma se efectúa por las barras no seccionadas de dicho sistema y, bajo el signo de suma, se contendrán sólo, las tensiones prefijadas en las barras no seccionadas del sistema básico. Por eso, cada ecuación de (16.10) contiene sólo una incógnita. En esto consiste la particular ventaja del método de tensiones.

Con el objeto de fijar correctamente el signo de la tensión en las barras no seccionadas del sistema básico, es indispensable conocer los signos de las fuerzas longitudinales. Para ello deben ser dadas las fuerzas longitudinales en las n barras seccionadas del sistema básico. Las tensiones dadas en las $B - n$ barras no seccionadas del sistema básico es deseable suponerlas iguales a las resistencias teóricas.

Sin embargo, esto no siempre es posible. El asunto estriba en que los desplazamientos recíprocos de los dos nudos del sistema básico, con los cuales lindan las barras seccionadas, por la dirección de estas barras y, para tensiones prefijadas en las barras restantes del sistema básico, serán absolutamente determinadas, dependiendo sólo del esquema de la armadura. Esto significa que los alargamientos relativos y las tensiones de las barras seccionadas que dependen de la dislocación de los nudos con los cuales ellas lindan, pueden resultar mayores que las resistencias teóricas, lo cual naturalmente, es inadmisible. En tales casos, es necesario resolver el problema por medio de repetidos intentos y, ésta es la desventaja del método.

El orden de cálculo, por el método de las tensiones, es el siguiente:

1) según el carácter del trabajo de la armadura, se fijan las fuerzas longitudinales en las barras seccionadas $X_1, \ldots, X_n$ dentro de los límites de los valores posibles, determinados aproximadamente o sobre la base de consideraciones teóricas (§ 163);

2) las fuerzas longitudinales N_{ip}, en todas las barras del sistema básico, se determinan por la fórmula (16.4).

3) de acuerdo con el signo de la fuerza longitudinal N_{ip}, se establecen el valor y el signo de las tensiones teóricas en todas las barras no seccionadas del sistema básico.

4) las tensiones en todas las barras seccionadas se determinan por las ecuaciones canónicas (16.10). Los signos de estas tensiones deberán corresponder a los signos de las fuerzas longitudinales anteriormente prefijadas en estas barras y, sus valores, a la condición de solidez o estabilidad.

Pero, si no se cumple aunque sólo sea una de las condiciones enumeradas en el p. 4, entonces, el cálculo no sirve. Es necesario cambiar o, las tensiones en algunas barras del sistema básico o, algunas fuerzas longitudinales $X_1, \ldots, X_n$ o, unas y otras y efectuar nuevamente el cálculo.

Prestamos la atención sobre una interesante propiedad de las armaduras hiperestáticas. Si la armadura puede ser diseñada, cualesquiera que sean las fuerzas longitudinales prefijadas $X_1, \ldots, X_n$ en las barras seccionadas del sistema básico y las tensiones dadas en las barras no seccionadas, entonces, ella puede ser diseñada, también, con otras fuerzas $X_1 + \Delta X_1, \ldots, X_n + \Delta X_n$, para las mismas tensiones que antes, pero, con la condición de que se conserve el signo de la fuerza longitudinal en cada barra (teorema de Levi). Esto es fácil de comprender, por cuanto, para tensiones invariables el estado deformado de la armadura es único. De las ecuaciones canónicas (16.10) se ve, igualmente, que para nuevos valores de las fuerzas longitudinales, las tensiones en las barras seccionadas no varían.

Si sobre la armadura actúa solamente la carga y las ecuaciones canónicas (16.10) son satisfechas, entonces, éstas también serán satisfechas al variar proporcionalmente todas las tensiones. En este caso es necesario tener en cuenta que el aumento de las tensiones trae consigo la disminución de las áreas de las secciones de las barras, o sea, la disminución del peso y del volumen de la armadura.

Todos los razonamientos expuestos se refieren al cálculo de una armadura sometida a una sola solicitación cualquiera, aislada o conjunta: la carga, el dislocamiento de los apoyos, la acción de la temperatura y al tensado de las barras de longitud incorrecta. El cálculo bajo la acción de varias solicitaciones sueltas aquí no se examina.

§ 163. VALORES POSIBLES DE LA INCOGNITA BÁSICA EN UNA ARMADURA MONOHIPERESTATICA. Al emplear el método de tensiones, es necesario prefijar los valores de las fuerzas longitudinales en las barras superfluas, siendo que estos valores no pueden ser completamente arbitrarios. Mostremos que para ellos existen límites, tras los cuales, **cualesquiera** que sean las tensiones, incluso, aunque sobrepasen los límites de resistencia, las ecuaciones canónicas no pueden ser satisfechas.

Dentro de estos límites, para los **posibles** valores de las incógnitas básicas X existen fronteras, aún, más estrechas, en las cuales, las tensiones en las barras de la armadura no superan a las resistencias teóricas.

Sin examinar esta cuestión en la forma general, nos limitaremos al cálculo de una armadura monohiperestática bajo una carga. Escribimos la ecuación canónica en la forma:

$$\sum \overline{N}_{i1} \frac{N_{iP}}{F_i} l_i = 0. \qquad (a)$$

Si los productos $\overline{N}_{i1} N_{iP}$ son simples para todas las barras entonces, esta ecuación no puede ser satisfecha.

Estudiemos para cuáles condiciones estos productos son simples. Para esto, hallemos el valor de X_1, para el cual, en cualquier i-ésima barra de la armadura, la fuerza longitudinal es igual a cero:

$$\overline{N}_{i1} X_1 + N^0_{iP} = 0, \text{ de donde } X_1 = -\frac{N^0_{iP}}{\overline{N}_{i1}}.$$

Sea que, al reducirse a cero la fuerza longitudinal en la barra a X_a es el mayor valor positivo de X_1 y, al reducirse a cero la fuerza longitudinal en la barra b, X_b es el menor valor negativo de X_1. Demostremos al principio que, para $X_1 = X_a + \Delta X_a$, donde $\Delta X_a \geqslant 0$, los productos $\overline{N}_{i1} N_{iP}$ son positivos. Para $X_1 < X_a$, las fuerzas longitudinales en las otras barras se reducen a cero. Supongamos que ellas se reducen a cero siendo $X_1 = X_a - \Delta X_l$ donde X_l es una magnitud positiva. Para ellas es válida la igualdad

$$N_{iP} = \overline{N}_{i1} (X_a - \Delta X_l) + N^0_{iP} = 0. \qquad (b)$$

Hallemos ahora la fuerza longitudinal N_{iP} para $X_1 = X_a + \Delta X_a$ teniendo en cuenta (b)

$$N_{iP} = \overline{N}_{i1} (X_a + \Delta X_a) + N^0_{iP} = \overline{N}_{i1} (\Delta X_a + \Delta X_l). \qquad (c)$$

El producto $\overline{N}_{i1} N_{iP} = \overline{N}^2_{i1} (\Delta X_a + \Delta X_l) > 0$, o sea, es positivo.

De este modo, queda demostrado que, para $X_1 = X_a + \Delta X_a$ y $\Delta X_a \geqslant 0$, los productos $\overline{N}_{i1} N_{iP}$ son positivos y que, cualesquiera que sean las tensiones, la ecuación canónica no podrá ser satisfecha. Algunos sumandos pueden ser negativos en la ecuación canónica (a) y ésta satisfecha, sólo, para $X_1 = X_a + \Delta X_a$ y $\Delta X_a < 0$. Análogamente, se puede mostrar que, para $X_1 = X_b - \Delta X_b$ y $\Delta X_b > 0$, los productos $\overline{N}_{i1} N_{iP}$ son negativos. Por eso, si las tensiones pudiesen ser fijadas sin limitaciones algunas, los valores de X_1, para los cuales la ecuación canónica (a) puede ser satisfecha, satifacen la desigualdad

$$X_b < X_1 < X_a. \qquad (16.11)$$

Dentro de estos límites existen márgenes más estrechos para los valores de X_1, con los cuales las tensiones en la barra seccionada no superan la resistencia teórica.

Si la fuerza longitudinal N_{iP} en cualquier i-ésima barra de la armadura, para el valor fijado de $X_1 = X_c$, resulta igual a cero, entonces, como norma, la armadura hiperestática es irrealizable.

El asunto estriba en que la divergencia entre los nudos a los cuales está unida esta barra, con $N_{iP}=0$, con raras excepciones, no es igual a cero. Por consiguiente, en esta barra de la armadura hiperestática, la tensión y la fuerza longitudinal no pueden ser iguales a cero, lo que contradice a las ecuaciones de la estática. Si suponemos que al área de la sección de esta barra es igual a cero, entonces, la armadura se torna isostática. Para conservar por cualquier motivo la indeterminación estática de la armadura con la fuerza longitudinal en la i-ésima barra igual a cero, es necesario que su longitud, en el estado indeformado, sea igual a la distancia entre los nudos de la armadura, que se encuentra en estado deformado, a los cuales está unida esta barra.

Ejemplo 48. Hallar algunos de los posibles valores de X_1 para la armadura de la fig. 341.

Hallemos los valores de X_1, para los cuales las fuerzas longitudinales en las barras de la armadura son iguales a cero:

$$N_{1-2}=\frac{5}{8}X_1-100=0, \text{ de donde, } X_1=160 \text{ tf};$$

$$N_{2-3}=-\frac{5}{8}X_1-100=0, \text{ de donde, } X_1=-160 \text{ tf};$$

$$N_{1-3}=-\frac{1}{3}X_1+80=0, \text{ de donde, } X_1=160 \text{ tf};$$

$$N_{2-4}=1\cdot X_1=0, \text{ de donde, } X_1=0.$$

Por consiguiente, $-160 \text{ tf} < X_1 < 160 \text{ tf}$.

Las armaduras isostáticas para $X_1=160$ tf, $X_1=0$ y $X_1=-160$ tf, se representan en la fig. 343, donde, con líneas punteadas, se representan las barras y apoyos con las fuerzas longitudinales y reacciones iguales a cero. Examinemos dentro de los límites señalados algún valor de X_1, por ejemplo, $X_1=-80$ tf. Las fuerzas longitudinales en las barras son: $N_{1-2}=-150$ tf, $N_{2-3}=-50$ tf, $N_{1-3}=120$ tf y $N_{2-4}=-80$ tf. En correspondencia con el signo de la fuerza longitudinal designamos las tensiones límites para las barras traccionadas $(+\sigma)$ y para las comprimidas $(-\sigma)$. La ecuación canónica (16.10) es

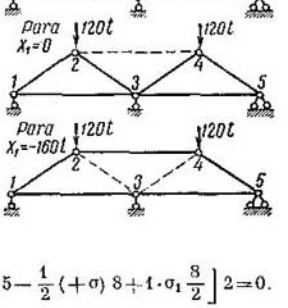


Fig. 343

$$\sum_{\text{no sec}} \bar{N}_{1i}\sigma_i l_i+\sigma_1 l_1=\left[\frac{5}{8}(-\sigma)5-\frac{5}{8}(-\sigma)5-\frac{1}{2}(+\sigma)8+1\cdot\sigma_1\frac{8}{2}\right]2=0.$$

Por consiguiente, $\sigma_1=(+\sigma)$, lo que contradice al signo aceptado de la incógnita básica $X_1=-80$ tf. Esto significa que, para tales tensiones, el valor tomado $X_1=-80$ tf no es viable.

Si a la barra 2-3 le asignamos la tensión $(-\sigma)\frac{89}{25}$, entonces, $\sigma_1=(-\sigma)$ y, el valor adoptado $X_1=-80$ tf se hace posible.

Examinemos aún el valor $X_1=+48$ tf. Las fuerzas longitudinales en las barras son: $N_{1-2}=-70$ tf, $N_{2-3}=-130$ tf, $N_{1-3}=56$ tf y $N_{2-4}=48$ tf. La ecuación canónica (16.10) es

$$\left[\frac{5}{8}(-\sigma)5-\frac{5}{8}(-\sigma)5-\frac{1}{2}(+\sigma)8+1\cdot\sigma_1\frac{8}{2}\right]2=0,$$

de donde $\sigma_1=(+\sigma)$. El signo de la tensión σ_1 coincide con el de la fuerza longitudinal dada. Por consiguiente, para tales tensiones, el valor $X_1=48$ tf adoptado es posible.

§ 164. VOLUMEN TEORICO DE UNA ARMADURA

Se llama volumen teórico de una armadura al volumen de sus barras, calculado sobre la base de sus longitudes teóricas y las áreas de las secciones netas F_{neto} de las barras traccionadas, sin tener en cuenta las uniones nodales. El volumen (y el peso) efectivo de la armadura se obtiene con el producto del volumen (peso) teórico por el coeficiente constructivo, mayor que la unidad. El volumen teórico es el índice de racionalidad del esquema de la armadura y, el coeficiente constructivo, el de racionalidad de su construcción.

El volumen teórico de la armadura n veces hiperestática puede ser expresado por la fórmula

$$V_n=\sum_m F_i l_i=\sum_{\text{no sec}}\frac{N_i l_i}{\sigma_i}+\sum_{\text{sec}}\frac{X_h l_h}{\sigma_h}. \tag{16.12}$$

El primer signo de suma se extiende sobre las barras de la armadura básica no seccionadas y, el segundo, sobre las seccionadas.

Examinemos una armadura bajo la acción de cualquier carga concreta. Sea que las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$ satisfacen a las ecuaciones canónicas del método de tensiones (16.10). El volumen de la armadura construida de un solo material, por (16.12), teniendo en cuenta a (16.4) y (16.10), será

$$V_n=\sum_{\text{no sec}}\frac{(\overline{N}_{i1}X_1+\overline{N}_{i2}X_2+\ldots+\overline{N}_{in}X_n+N^0_{ip})l_i}{\sigma_i}-$$

$$-\sum_{\text{sec}}\frac{X_h l_h^2}{\sum\limits_{\text{no sec}}\overline{N}_{ih}\sigma_i l_i}.$$

Presentemos esta expresión en la forma

$$V_n=A+\sum_{\text{sec}}B_h X_h, \tag{16.13}$$

donde

$$A=\sum_{\text{no sec}}\frac{N^0_{ip}l_i}{\sigma_i},\quad B_h=\sum_{\text{no sec}}\frac{\overline{N}_{ih}l_i}{\sigma_i}-\frac{l_h^2}{\sum\limits_{\text{no sec}}\overline{N}_{ih}\sigma_i l_i}.$$

No es difícil de convencerse de que A y B_h no tienen relación con X_h. Esto significa que el volumen teórico de la armadura depende **linealmente** de cada una de las fuerzas $X_1, \ldots, X_n$, es decir, aumenta o disminuye según la variación de cada X_h. El menor valor de la función V_n (16.13), para las tensiones dadas, se encontrará en el límite de su zona de determinación. Este límite se determina con la variación del signo de la fuerza longitudinal, aunque sólo sea en una de las barras de la armadura, al variar las magnitudes $X_1, \ldots, X_n$, por cuanto,

como resultado de la variación ulterior de estas magnitudes varía el signo de la tensión en esta barra y, por lo tanto, variará la propia dependencia funcional (16.13).

Recordamos que si en una armadura hiperestática, que se halla bajo la acción de alguna carga determinada, se hallaron las secciones de las barras con las tensiones prefijadas, para las fuerzas $X_1, \ldots, X_n$ dadas en las barras seccionadas del sistema básico, entonces, pueden ser halladas nuevas secciones de las barras con las mismas tensiones, pero para otras fuerzas $X_1 + \Delta X_1, \ldots, X_n + \Delta X_n$, si con estas fuerzas se conserva el signo de las fuerzas longitudinales en todas las barras de la armadura.

Basándonos en lo dicho, variaremos una incógnita cualquiera X_ko, variando de ellas simultáneamente, cada una, en aquella dirección, por donde el volumen de la armadura disminuya hasta que en alguna barra a la fuerza longitudinal N_a se reduzca a cero. Al variar ulteriormente las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$, en la misma dirección, la fuerza longitudinal N_a cambia de signo. Esto significa que el volumen V_n de la armadura, para las tensiones dadas en sus barras y cierta variación de las fuerzas $X_1, \ldots, X_n$, será mínimo, cuando la fuerza longitudinal en alguna de estas barras se reduzca a cero.

Si excluimos a esta barra de la armadura, entonces, esta última se hace $n-1$ veces hiperestática, con un volumen menor que el de la armadura primitiva n veces hiperestática e, igual a él, si las incógnitas X, para el orden y la ley dados de sus variaciones, toman valores, para los cuales, la fuerza longitudinal N_a es igual a cero, es decir, cuando

$$V_{n-1} \leqslant V_n. \tag{16.14}$$

Por cuanto el paso a la armadura $n-1$ veces indeterminable está ligado con la ley de variación de las incógnitas X al disminuir el volumen de la armadura, entonces, estas armaduras $n-1$ veces indeterminables pueden ser no una, sino varias. Para las tensiones dadas en las barras, todas ellas satisfacen la desigualdad (16.14). En el caso de cierta variación de las incógnitas X, las fuerzas longitudinales pueden reducirse a cero simultáneamente en varias barras de la armadura; la eliminación de estas barras de la armadura hace que esta última disminuya aún más su grado de indeterminación estática. Por ejemplo, en las armaduras simétricas, en el caso de carga simétrica, las fuerzas longitudinales en las barras simétricas se reducen a cero simultáneamente. En este caso, si la armadura es monoindeterminable, para que ella permanezca invariante, deberá ser conservada una barra.

Razonando del mismo modo, se puede pasar de la armadura $n-1$ veces indeterminable a la $n-2$ veces, llegando, al fin y al cabo, a la isostática. Esto significa que el volumen teórico de cualquier armadura isostática, obtenida **eliminando** barras de la armadura hiperestática dada, habiendo sido fijadas de antemano las tensiones, es menor que el volumen de la armadura hiperestática original o, en último caso es igual a él. Por consiguiente, las armaduras de volumen mínimo, cuyas tensiones han sido fijadas de antemano, son las isostáticas, obtenidas eliminando n barras de la hiperestática dada. Dentro de estas armaduras de volumen mínimo está incluida la de menor volumen mínimo.

§ 165. TENSIONES DEBIDAS A LA ACCION DE LA TEMPERATURA, DISLOCACION DE LOS APOYOS Y TRACCION DE LAS BARRAS DE LONGITUD INCORRECTA. Los coeficientes de la ecuación canónica (16.2)

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kl} + \Delta_{k\Delta} = 0$$

pueden ser escritos en la forma

$$\delta_{km} = \frac{1}{F_0} \sum \frac{\overline{N}_{ik}\overline{N}_{im}}{E_i} \left(\frac{F_0}{F_i}\right) l_i,$$

donde F_0 es la superficie de una barra cualquiera de la armadura.

Los términos independientes Δ_{kt} y $\Delta_{k\Delta}$ no dependen de F_0 y, por eso

$$X_k = \frac{D_k}{D} = A_k F_0, \quad N_i = \overline{N}_{i1} X_1 + \overline{N}_{i2} X_2 + \ldots + \overline{N}_{in} X_n = B_i F_0,$$

donde D y D_k son determinantes y A_k y B_i ciertos números constantes.

La tensión en cualquier barra de la armadura es igual a $\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} = B_i \frac{F_0}{F_i}$. Como se ve, la tensión depende de la relación adoptada $\frac{F_0}{F_i}$ y no de la magnitud F_0. Por eso, al variar proporcionalmente las áreas de las secciones de todas las barras de la armadura, las tensiones debidas a la acción de la temperatura, dislocación de apoyos y tracción en las barras de longitud incorrecta, no varían.

§ 166. LÍNEAS DE INFLUENCIA DE LAS FUERZAS LONGITUDINALES. Nos limitaremos a examinar el método estático de

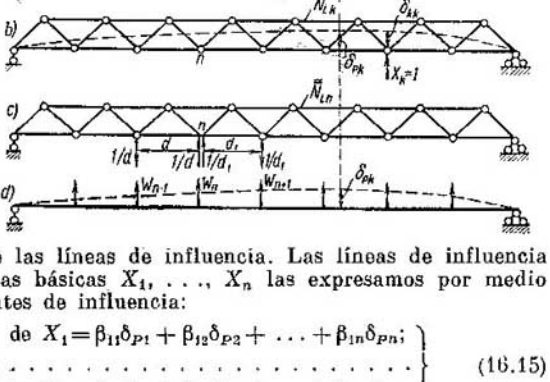


Fig. 344

construcción de las líneas de influencia. Las líneas de influencia de las incógnitas básicas $X_1, \ldots, X_n$ las expresamos por medio de los coeficientes de influencia:

$$\left.\begin{aligned} &\text{l.i. de } X_1 = \beta_{11}\delta_{P1} + \beta_{12}\delta_{P2} + \ldots + \beta_{1n}\delta_{Pn};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\text{l.i. de } X_n = \beta_{n1}\delta_{P1} + \beta_{n2}\delta_{P2} + \ldots + \beta_{nn}\delta_{Pn}. \end{aligned}\right\} \quad (16.15)$$

La gráfica de los valores de δ_{Pk} es el diagrama de los desplazamientos verticales del cordón de carga debidos a $X_k = 1$ (fig. 344). Por consiguiente, las líneas de influencia de las incógnitas $X_1, \ldots, X_n$ están formadas con los diagramas de los desplazamientos δ_{Pk} multiplicados por los coeficientes de influencia. Es cómodo construir el diagrama de los desplazamientos δ_{Pk} por medio de los

pesos elásticos. Para la determinación del peso elástico del enésimo nudo es necesario aplicar, en este nudo, el grupo unitario de fuerzas (fig. 344, *c*) y, determinar de él, las fuerzas longitudinales N_{in} en las barras del sistema básico. La magnitud del peso elástico se determina por la fórmula (11.79)

$$W_{nk} = \sum N_{in} \frac{\overline{N}_{ik}}{EF_i} l_i. \qquad (16.16)$$

El diagrama de los momentos flectores en una viga simplemente apoyada, debidos a los pesos elásticos (fig. 344, *d*), es el diagrama nodal de δ_{pk}.

Si el sistema básico tiene varios tramos (véase la fig. 340, *a*), entonces, el diagrama de los momentos flectores debidos a los pesos elásticos se construye en la cadena de vigas de un tramo. Las líneas de influencia de las fuerzas longitudinales en las barras de las armaduras pueden ser construidas por la expresión general (14.77), que en este caso, tiene la forma

$$\text{l.i. de } N_{iP} = (\text{l.i. de } X_1)\,\overline{N}_{i1} + (\text{l.i. de } X_2)\,\overline{N}_{i2} + \ldots + \\ + (\text{l.i. de } X_n)\,\overline{N}_{in} + \text{l.i. de } N^0_{iP}. \qquad (16.17)$$

§ 167. CALCULO APROXIMADO DE SISTEMAS COMBINADOS

1. VIGAS O ARMADURAS REFORZADAS CON UNA CADENA ARTICULADA

Los puentes colgantes es el tipo más extendido de sistemas combinados. Examinemos, para generalizar, un sistema con presión horizontal soportado por una viga (fig. 345). Este sistema es de triple indeterminación estática.

En calidad de sistema básico es cómodo tomar el sistema hiperestático obtenido, seccionando la cadena (fig. 345, *b*). En el caso examinado, el sistema básico es dos veces indeterminado.

La ecuación canónica tiene la forma

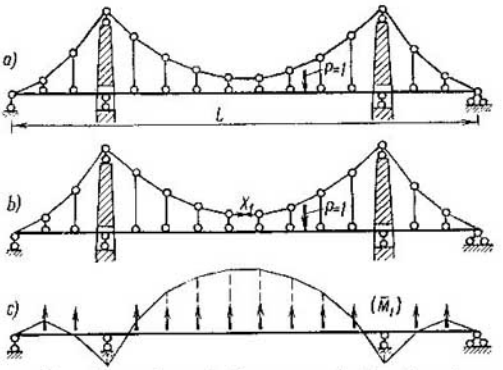
$$\delta^{(2)}_{11} X_1 + \delta^{(2)}_{1P} = 0. \qquad (16.18)$$

Para determinar $\delta^{(2)}_{11}$ y $\delta^{(2)}_{1P}$ es necesario hallar, en la cadena y las suspensiones, las fuerzas longitudinales $\overline{N}_{i1}$ y construir, en la viga continua, el diagrama de los momentos flectores $\overline{M}_1$ debidos a $X_1 = 1$. El desplazamiento $\delta^{(2)}_{11}$ se determina por la fórmula

$$\delta^{(2)}_{11} = \sum \frac{\overline{N}^2_{i1} l_i}{EF_i} + (\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_1) + \frac{1 \cdot L}{(EF) \text{ de la viga}} \qquad (16.19)$$

El diagrama de los momentos flectores $\overline{M}_1$ se construye por la ecuación de tres momentos. Si la cadena está ligada a la viga excéntricamente, entonces, en dicha viga, es necesario considerar los momentos flectores debidos a la fuerza horizontal aplicada excéntricamente.

Fig. 345



La expresión $\delta_{1P} = \delta_{P1}$ determina el diagrama de los desplazamientos verticales del eje de la viga continua, en el sistema básico, debidos a $X_1 = 1$, el cual puede ser hallado utilizando distintos procedimientos, por ejemplo, el de la ecuación general del eje de una viga curva, si la viga continua es de sección constante o, por los pesos elásticos (método semigráfico), si es de sección variable.

Las líneas de influencia de M y Q en la viga y las fuerzas longitudinales en las suspensiones y la cadena, se determinan por la expresión general (14.77):

$$\left.\begin{aligned} &\text{l.i. de } M = (\text{l.i. de } X_1)\,\bar{M}_1 + \text{l.i. de } M^0;\\ &\text{l.i. de } Q = (\text{l.i. de } X_1)\,Q_1 + \text{l.i. de } Q^0;\\ &\text{l.i. de } N_i = (\text{l.i. de } X_1)\,\bar{N}_{i1}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.20)$$

Aquí, la l. i. de M^0 y la l. i. de Q^0 son las líneas de influencia de estas magnitudes en la viga continua de tres tramos.

En el sistema que recibe presión horizontal, las líneas de influencia de las tensiones de borde se construyen por medio de las l. i. de X_1 y M por la fórmula

$$\text{l.i. de } \sigma_{\text{bord}} = \pm \frac{\text{l.i. de } X_1}{F} \pm \frac{\text{l.i. de } M}{W}. \qquad (16.21)$$

En el procedimiento de cálculo expuesto, las fuerzas internas se determinaron por el estado indeformado del sistema. Por eso es que, en la deformación del sistema, no se tuvieron en cuenta las variaciones de las fuerzas longitudinales en la cadena y los momentos flectores de la viga. Tampoco fueron considerados los momentos complementarios en la viga deformada como resultado de la presión horizontal recibida, lo que se admite sólo en los sistemas en que, en comparación con la fuerza crítica para la viga continua, el empuje de la cadena X_1 es pequeño.

Fig. 346

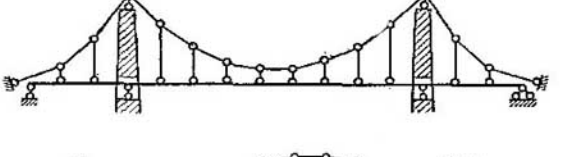
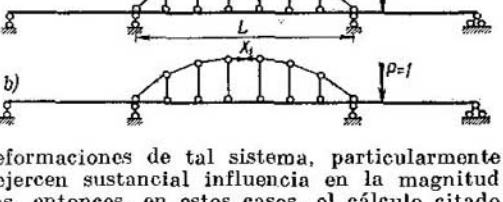


Fig. 347



Por cuanto las deformaciones de tal sistema, particularmente para grandes luces, ejercen sustancial influencia en la magnitud de las fuerzas internas, entonces, en estos casos, el cálculo citado necesita ser más exacto, lo que se puede lograr por medio de aproximaciones sucesivas.

Un cálculo preciso por las líneas de influencia es imposible, ya que al considerar el estado de deformación se infringe el principio de independencia de acción de las fuerzas.

Si el sistema no recibe presión horizontal (fig. 346), entonces, todo lo expuesto más arriba es aplicable, también, para él, suponiendo que la fuerza longitudinal en la viga es igual a cero. El cálculo de tal sistema por el estado indeformado es más preciso que el de aquel que recibe presión horizontal.

Al calcular un sistema combinado en forma de armadura continua reforzada con una cadena, es más cómodo emplear en calidad de sistema básico, un sistema isostático, obtenido con el seccionado de la cadena y dos barras de la armadura sobre los apoyos. Los coeficientes de tipo δ_{km} se determinan por la fórmula (16.2). Los diagramas de los desplazamientos δ_{p1}, δ_{p2} y δ_{p3} se construyen por los pesos elásticos (16.16). Las líneas de influencia de las incógnitas se determinan por las expresiones (16.15) y, las de las fuerzas longitudinales en las barras de la cadena y la armadura, por las (16.17).

2. VIGAS O ARMADURAS REFORZADAS CON UN ARCO ARTICULADO (fig. 347)

El cálculo se efectúa sobre la base de las mismas consideraciones que fueron expuestas durante el cálculo de las vigas o armaduras reforzadas con una cadena articulada. Como sistema básico se toma también a la viga continua de tres tramos (fig. 347, *b*), conservando las expresiones (16.18)—(16.20). Por cuanto el tramo del medio de la viga trabajará a la flexión con la fuerza longitudinal que se trasmite a ella desde el arco, entonces, en las secciones de este tramo,

es necesario construir las líneas de influencia de los momentos nucleares o las de las tensiones de borde. En los tramos extremos se construyen las líneas de influencia de los momentos centrales.

Dado que en el tramo central de la viga reforzada con un arco articulado, la fuerza longitudinal puede tener diferentes signos según la posición de la carga, entonces, la inexactitud del cálculo, lo mismo que en la viga reforzada con una cadena, consiste, antes que nada, en que no se tienen en cuenta ni la influencia que ejercen las fuerzas longitudinales que comprimen la viga sobre sus momentos flectores en el estado deformado, ni la variación de estas fuerzas en el arco articulado y los momentos flectores en la viga, ligados a la variación del sistema durante su deformación.

Las instrucciones para el cálculo de las armaduras reforzadas con una cadena articulada se mantienen invariables, también, para las armaduras reforzadas con un arco articulado.

CAPITULO XVII * CALCULO DE ARCOS HIPERESTATICOS POR EL METODO DE FUERZAS

§ 168. CLASIFICACION Y FORMA DE LOS ARCOS. Los arcos hiperestáticos suelen ser *biarticulados* (fig. 348, *a*), *inarticulados* (fig. 348, *b*) y, además, aunque de uso poco frecuente, *uniarticulados*

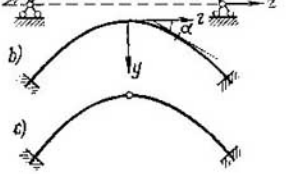


Fig. 348

(fig. 348, *c*). Los arcos pueden ser simétricos y asimétricos. Los arcos biarticulados, uniarticulados e inarticulados son, respectivamente, de única, doble y triple indeterminación estática. Las barras curvas cerradas (anillos), si no poseen articulaciones, son, también, de triple indeterminación estática.

El eje y las secciones transversales de una barra curva determinan la forma del arco, que se elige sobre la base de distintos razonamientos. La consideración principal requiere que el arco sea racional. Para los valores de la carga, luz y flecha de arco conocidos, se considera como forma teórica racional del arco del tipo dado, a la forma

que asegura la necesaria solidez y estabilidad del arco siendo el volumen de éste el mínimo.

El eje del arco racional y sus secciones se determinan mediante investigaciones especiales. La distribución del material a lo largo de tal arco responde a la distribución de las fuerzas internas.

La distribución del material a lo largo de un arco con el eje conocido, también, deberá corresponder a la distribución de las fuerzas internas y, antes que nada, a los momentos flectores y fuerzas longitudinales. En la fig. 349 se expone la distribución aproximada de los momentos flectores mayores, en valor absoluto, debidos a alguna carga rodante a lo largo de distintos arcos.

Fig. 349. Distribución aproximada de los momentos flectores máximos debidos a la carga rodante a lo largo de los arcos

1—sin articulaciones; 2—monoarticulados; 3—biarticulados; 4—triarticulados

La segunda consideración al elegir la forma de los arcos, se basa en el deseo de conseguir que los resultados del cálculo tomen la forma de fórmulas simples. En concordancia con esto, es necesario establecer las leyes de variación de las áreas y momentos de inercia de las secciones transversales partiendo de dos condiciones:

1) las dimensiones y la forma de las secciones deberán corresponder a la distribución de las fuerzas de cálculo internas;

2) las integrales en la fórmula de los desplazamientos deberán expresarse, en forma finita, por medio de funciones elementales, para configuraciones simples del eje del arco.

Exponemos algunas leyes de variación de los momentos de inercia de las secciones para arcos simétricos, las cuales, en casos aislados, en cierta medida, satisfacen estas condiciones.

a) Para los arcos inarticulados (véase la fig. 348, *b*)

$$J = J_0 : \cos\alpha \left[1 - (1-n)\frac{2z}{l}\right], \quad J = J_0 : \cos\alpha \left[1 - (1-n)\frac{y}{f}\right]. \quad (17.1)$$

b) Para los arcos biarticulados (fig. 348, *a*)

$$J = J_0 \cos\alpha,$$

$$J = J_0 : \cos\alpha \left[1 + (n-1)\frac{2z}{l}\right], \quad J = J_0 : \cos\alpha \left[1 + (n-1)\frac{y}{f}\right], \quad (17.2)$$

$$J = J_0 : \cos\alpha \left[1 + (n-1)\left(\frac{2z}{l}\right)^5\right],$$

donde $n = J_0 : J_{arr} \cos \alpha_{arr}$; J_0 es el momento de inercia en la llave del arco y, J_{arr}, es el momento de inercia en el arranque del arco.

Durante la proyección de puentes, particularmente de los urbanos, la elección de las formas de los arcos, también, se determina por consideraciones arquitectónicas.

§ 169. OBSERVACIONES PARA EL CALCULO DE ARCOS. Por cuanto el arco es una barra curva, para calcularlo con exactitud es necesario considerar su curvatura, o sea, determinar las tensiones por las fórmulas (8.30) y los desplazamientos por la (11.37).

Señalamos, no obstante, que los arcos y las bóvedas utilizadas en la construcción, aunque a veces también pueden tener gran curvatura como, por ejemplo, los tubos de los tramos pequeños por debajo de los terraplenes, normalmente, ellos son arcos de reducida curvatura, para los cuales, $\frac{\rho}{h} > 10$. Para tales arcos no tiene importancia la consideración de la curvatura en la fórmula de los desplazamientos (11.37) y su cálculo se efectúa por las fórmulas para las barra de pequeña curvatura.

Por cuanto las cuestiones de principio del cálculo de arcos pueden ser expuestas con más simplicidad sobre la base de la fórmula de los desplazamientos de la barra de pequeña curvatura (11.38), entonces, para simplificar la exposición, en adelante emplearemos esta fórmula. Tomaremos las fuerzas internas positivas por la fig. 200, *a*. En los casos en que sea indispensable, se puede efectuar el cálculo del arco considerando su curvatura, empleando, en lugar de la fórmula de los desplazamientos (11.38), las fórmulas (11.37), conservando, al mismo tiempo, todo el orden del cálculo expuesto a continuación.

En comparación con los momentos flectores M, la influencia de las fuerzas internas N y Q sobre los desplazamientos en los arcos, como norma, es mayor que en los pórticos. Ella depende de la carga y sólo puede ser apreciada por los resultados del cálculo. Usualmente, con otras condiciones semejantes, la influencia de N y Q para los arcos no articulados es mayor que para los biarticulados [1].

Si los momentos flectores M en el arco son grandes, la influencia de N y Q, en comparación con la de M, disminuye y, viceversa. En los casos, cuando la configuración del arco sigue la curva de presión para el arco triarticulado, la influencia de M y Q se reduce a cero. Para las configuraciones del arco cercanas a la curva de presión para los arcos triarticulados, particularmente, en los arcos de pendiente suave, la fuerza longitudinal N ejerce una influencia preponderante sobre los desplazamientos o, por lo menos, igual a la influencia del momento flector.

El juicio existente sobre que, en todos los casos, la influencia de N, en comparación con la de Q, es preponderante, no siempre es correcta, incluso para los arcos relativamente suaves. La cuestión es que no se debe olvidar, el coeficiente $\mu > 1$ (para las secciones de doble te, $\mu = 2{,}5 - 3$) y el módulo de elasticidad $G \approx 0{,}4E$, los

cuales, en la fórmula de los desplazamientos aumentan el sumando que tiene en cuenta la influencia de Q.

Por cuanto el arco, en muchos casos, representa la parte básica de obras caras e importantes, sin el análisis correspondiente, no se debe ignorar la influencia de algunas fuerzas internas al determinar los desplazamientos.

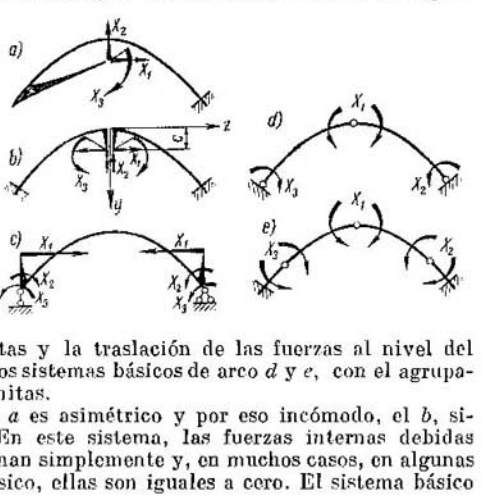
Nosotros nos limitaremos solamente al cálculo de los arcos simétricos, por ser los más frecuentemente empleados. El cálculo de los arcos asimétricos, muy raros de encontrar, se diferencia poco del de los simétricos. Las coordenadas del centro elástico de los arcos asimétricos se determinan por dos expresiones y las ecuaciones canónicas tienen la forma (14.37).

§ 170. SISTEMAS BASICOS PARA ARCOS SIN ARTICULACIONES. En la fig. 350 se representan diferentes sistemas básicos para arcos simétricos sin articulaciones. Estos se dividen en: de viga (fig. 350, *a-c*) y de arco o arqueados (fig. 540, *d*, *e*). Todos los sistemas básicos permiten el desmembramiento de las ecuaciones canónicas y su reducción a la forma:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} &= 0;\\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0;\\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.3)$$

En los sistemas básicos de viga *a* y *b*, esto se logra con el traslado de las fuerzas al centro elástico, en el sistema básico *c*, con el agru-

Fig. 350



pamiento de incógnitas y la traslación de las fuerzas al nivel del centro elástico y, en los sistemas básicos de arco *d* y *e*, con el agrupamiento de las incógnitas.

El sistema básico *a* es asimétrico y por eso incómodo, el *b*, simétrico y cómodo. En este sistema, las fuerzas internas debidas a la carga, se determinan simplemente y, en muchos casos, en algunas partes del sistema básico, ellas son iguales a cero. El sistema básico

c también es simétrico, pero en él, las fuerzas internas, para cualquier carga no autoequilibrada, no son iguales a cero por toda su longitud. Los sistemas básicos de arco *d* y *e* son simétricos. En ellos, la determinación de las fuerzas internas es más compleja que en los sistemas básicos de viga y, somo norma, ellas tampoco son iguales a cero por toda la longitud del sistema básico.

En los sistemas básicos de viga las fuerzas internas debidas a la carga se diferencian considerablemente de las fuerzas internas en el arco sin articulaciones y, en los sistemas básicos de arco las fuerzas longitudinales, por ejemplo, son próximas a las fuerzas longitudinales en el arco. Por eso, los sistemas básicos de arco (particularmente el *e*), por su trabajo, son más semejantes al arco sin articulaciones que los de viga.

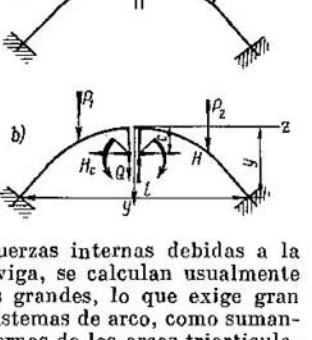


Fig. 351

En el arco sin articulaciones las fuerzas internas debidas a la carga, al emplear sistemas básicos de viga, se calculan usualmente como la diferencia de números vecinos grandes, lo que exige gran precisión en los cálculos y, al emplear sistemas de arco, como sumandos que complementan a las fuerzas internas de los arcos triarticulados, pudiendo ser calculados sin tanta precisión. Esto es importante al efectuar la integración numérica de las integrales contenidas en la fórmula de los desplazamientos. Si las integrales, en la fórmula de los desplazamientos, se expresan en forma finita por medio de funciones elementales, entonces, la ventaja de los sistemas básicos de arco sobre los de viga disminuye.

En los sistemas básicos de viga, las fuerzas internas debidas a la carga pueden ser consideradas artificialmente iguales a las fuerzas internas de los sistemas básicos de arco, si a la carga que actúa sobre el sistema básico de viga le unimos algunas fuerzas por la dirección de las incógnitas básicas. Esto brinda la posibilidad de eliminar el defecto señalado de los sistemas básicos de viga.

Por ejemplo, para el sistema básico *b* (fig. 350), deberán ser aplicadas, en el corte, la presión horizontal H y la fuerza transversal Q tomadas del cálculo del sistema básico de arco del tipo dado (fig. 351, *a*). Para esto es necesario aplicar en el centro elástico del

sistema básico las fuerzas $X_1 = H$ y $X_2 = Q$ y el momento $X_3 = Hc$ (fig. 351, *b*). Esto se cumple en forma sencilla cuando el arco se calcula bajo una carga fija. Al construir las líneas de influencia, las fuerzas agregadas serán funciones de la posición del peso.

En adelante, por ser el más simple, utilizaremos el sistema básico *b*.

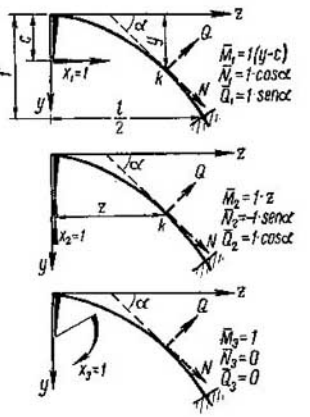
§ 171. CALCULO DE ARCOS SIN ARTICULACIONES BAJO CARGA FIJA. La coordenada del centro elástico se determina por la fórmula

$$c = \int_0^{l/2} y\,dv : \int_0^{l/2} dv,$$

$$\text{donde } dv = \frac{dz}{EJ\cos z} \tag{17.4}$$

Los valores de las fuerzas internas debidas a las incógnitas unitarias básicas se dan en la fig. 352. En las ecuaciones canónicas (17.3)

Fig. 352



las magnitudes δ_{11}, δ_{22} y δ_{33} no dependen de la carga. Determinémoslas por las fórmulas (11.38), suponiendo que $\rho = \infty$, es decir, despreciando la curvatura del arco.

El primer desplazamiento unitario es

$$\frac{\delta_{11}}{2} = \int_0^{l/2} \bar{M}_1^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} + \int_0^{l/2} \bar{N}_1^2 \frac{dz}{EF\cos\alpha} + \mu \int_0^{l/2} \bar{Q}_1^2 \frac{dz}{GF\cos\alpha}.$$

Colocamos aquí los valores de $\bar{M}_1$, $\bar{N}_1$ y $\bar{Q}_1$

$$\frac{\delta_{11}}{2} = \int_0^{l/2} (y-c)^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} + \int_0^{l/2} \cos\alpha \frac{dz}{EF} + \mu \int_0^{l/2} \operatorname{sen}^2\alpha \frac{dz}{GF\cos\alpha}. \tag{17.5}$$

En base a (17.4) se puede escribir la expresión del primer sumando de otra manera:

$$\int_0^{l/2} (y-c)^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} = \int_0^{l/2} (y-c)^2 \times \frac{dz}{EJ\cos\alpha} + k \int_0^{l/2} (y-c) \frac{dz}{EJ\cos\alpha},$$

donde k es un número arbitrario.
Definitivamente

$$\int_0^{l/2} (y-c)^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} = \int_0^{l/2} (y-c)(y-c+k) \frac{dz}{EJ\cos\alpha} \qquad (17.6)$$

Suponiendo que sea $k=c$, obtenemos

$$\int_0^{l/2} (y-c)^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} = \int_0^{l/2} (y-c)\, y \frac{dz}{EJ\cos\alpha}. \qquad (17.7)$$

En algunos casos, el segundo miembro de (17.7) es más simple

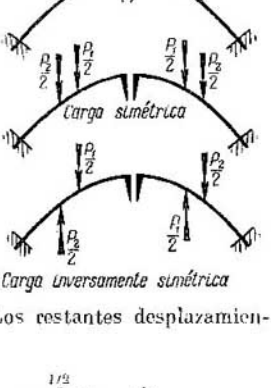


Fig. 353

que el primero.

Durante la integración, todos los valores contenidos en la expresión bajo el signo de integral deberán ser expresados por medio de la variable z, en particular,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}},$$

donde y es la ordenada del eje del arco. Los restantes desplazamientos unitarios son:

$$\frac{\delta_{22}}{2} = \int_0^{l/2} \overline{M}_2^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} + \int_0^{l/2} \overline{N}_2^2 \frac{dz}{EF\cos\alpha} + \mu \int_0^{l/2} \overline{Q}_2^2 \frac{dz}{GF\cos\alpha} =$$

$$= \int_0^{l/2} z^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} + \int_0^{l/2} \operatorname{sen}^2\alpha \frac{dz}{EF\cos\alpha} + \mu \int_0^{l/2} \cos\alpha \frac{dz}{GF}; \qquad (17.8)$$

$$\frac{\delta_{33}}{2} = \int_0^{l/2} \overline{M}_3 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} = \int_0^{l/2} \frac{dz}{EJ\cos\alpha}. \qquad (17.9)$$

Al determinar los desplazamientos de carga, descomponemos la carga en simétrica y de simetría inversa (fig. 353). La primera ha de originar sólo los desplazamientos simétricos Δ_{1P} y Δ_{3P} y,

la segunda, solamente los desplazamientos de simetría inversa Δ_{2P}:

$$\frac{\Delta_{1P}}{2} = \sum \int (y-c)\frac{M_P^s dz}{EJ\cos\alpha} + \sum \int \cos\alpha \frac{N_P^s dz}{EF\cos\alpha} + \\ + \sum \mu \int \operatorname{sen}\alpha \frac{Q_P^s dz}{GF\cos\alpha}; \qquad (17.10)$$

$$\frac{\Delta_{2P}}{2} = \sum \int z\frac{M_P^{i,s} dz}{EJ\cos\alpha} + \sum \int (-\operatorname{sen}\alpha)\frac{N_P^{i,s} dz}{EF\cos\alpha} + \\ + \sum \mu \int \cos\alpha \frac{Q_P^{i,s} dz}{GF\cos\alpha}; \qquad (17.11)$$

$$\frac{\Delta_{3P}}{2} = \sum \int \frac{\overline{M}_P^s\, dz}{EJ\cos\alpha}. \qquad (17.12)$$

En este caso, la integración se efectúa sólo a lo largo de la mitad derecha del sistema básico.

También aquí, es necesario expresar a todas las subintegrales y a los límites de integración por medio de la variable z.

Si las integrales, en las expresiones (17.4) — (17.12), en la forma definitiva, no son expresadas por medio de funciones elementales y se calculan, únicamente, con una integración numérica, entonces, en aquellos casos cuando en el sistema básico las fuerzas internas son distintas de cero a lo largo de todo el arco, es cómodo agregarle a la carga simétrica la presión horizontal H debido a esta carga en el arco triarticulado (véase la fig. 351).

En los casos cuando la carga se ubica sólo en una mitad del arco, no hay la necesidad de dividirla en simétrica y de simetría inversa, dado que al determinar los desplazamientos de carga, la integración sólo se efectúa por la mitad cargada del arco. Las expresiones de las fuerzas sustituyentes (internas) en el arco pueden ser obtenidas por la fórmula general (14.17), las cuales, para el sistema básico adoptado, son:

$$M_P = (y-c)X_1 + zX_2 + 1\cdot X_3 + M_P^s + M_P^{i,s}; \qquad (17.13)$$

$$N_P = \cos\alpha X_1 - \operatorname{sen}\alpha X_2 + 0 + N_P^s + N_P^{i,s}; \qquad (17.14)$$

$$Q_P = \operatorname{sen}\alpha X_1 + \cos\alpha X_2 + 0 + Q_P^s + Q_P^{i,s}. \qquad (17.15)$$

La verificación de la corrección del cálculo puede ser efectuada por la expresión

$$\sum \int \overline{M}_S \frac{M}{EJ}\, ds + \sum \int \overline{N}_S \frac{N}{EF}\, ds + \sum \mu \int \overline{Q}_S \frac{Q}{GF}\, ds = 0, \qquad (17.16)$$

donde

$$\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 = (y-c) + z + 1;$$
$$\overline{N}_S = \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha;$$
$$\overline{Q}_S = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 + \overline{Q}_3 = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha.$$

La expresión (17.16) es también válida en el caso cuando $\overline{M}_S$, $\overline{N}_S$ y $\overline{Q}_S$ no contienen a todas las fuerzas sustituyentes unitarias sino sólo a las debidas a dos de las incógnitas básicas.

§ 172. CALCULO DE ARCOS SIN ARTICULACIONES A LA ACCION DE LA TEMPERATURA. Examinemos el caso en que la temperatura del arco aumenta después de su fabricación: por arriba

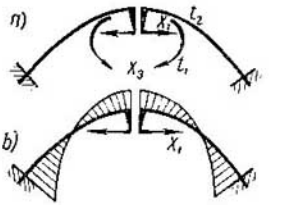


Fig 354

en t_2 y por abajo en t_1 (fig. 354). En el caso cuando la temperatura actúa simétricamente sobre el arco, la incógnita de simetría inversa $X_2 = 0$.

Las ecuaciones canónicas serán:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1t} &= 0; \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3t} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.17)$$

de donde obtenemos

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}, \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3t}}{\delta_{33}}.$$

Teniendo en cuenta que la fuerza longitudinal comprimente, en los arcos, se toma positiva, por las fórmulas (11.38), (11.20) y (11.21), obtenemos:

$$\frac{\Delta_{1t}}{2} = -\int_0^{l/2} \overline{N}_1 \frac{\beta}{h}(t_1h_2 + t_2h_1)\frac{dz}{\cos\alpha} - \int_0^{l/2} \overline{M}_1 \frac{\beta}{h}(t_2 - t_1)\frac{dz}{\cos\alpha};$$

$$\frac{\Delta_{3t}}{2} = -\int_0^{l/2} \overline{M}_3 \frac{\beta}{h}(t_2 - t_1)\frac{dz}{\cos\alpha}.$$

Efectuando tas sustituciones

$$\overline{N}_1 = \cos\alpha, \quad \overline{M}_1 = (y - c) \quad \text{y} \quad \overline{M}_3 = 1,$$

tendremos que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta_{1t}}{2} &= -\int_0^{l/2} \frac{\beta}{h}(t_1h_2 + t_2h_1)\,dz - \\ &\quad -\int_0^{l/2} (y - c)\frac{\beta}{h}(t_2 - t_1)\frac{dz}{\cos\alpha}; \\ \frac{\Delta_{3t}}{2} &= -\int_0^{l/2} \frac{\beta}{h}(t_2 - t_1)\frac{dz}{\cos\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (17.18)$$

En el caso particular, siendo $t_1 = t_2 = t$, obtenemos que

$$\Delta_{1t} = -\beta t l, \quad \Delta_{3t} = 0$$

y, por consiguiente,

$$X_3 = 0, \quad X_1 = \frac{\beta t l}{\delta_{11}}. \tag{17.19}$$

En la fig. 354, *b*, se muestra el aspecto del diagrama de los momentos flectores para este caso particular. Por cuanto δ_{11} se puede representar en la forma $\frac{A}{EJ_0}$, donde A es un número constante y EJ_0, la rigidez a la flexión de cualquier sección, por medio de la cual se expresan las rigideces de las secciones restantes, entonces, $X_1 = EJ_0 \frac{\beta t l}{A}$. Esto significa que el empuje del arco, debido a la acción de la temperatura, es proporcional a su rigidez.

El cálculo de la contracción del material de los arcos de hormigón, la cual es equivalente a cierta disminución de la temperatura, se efectúa también por la fórmula (17.19).

§ 173. CALCULO DE LOS ARCOS SIN ARTICULACIONES AL DESPLAZAMIENTO DE LOS VINCULOS. Las ecuaciones canónicas son:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2\Delta} = 0; \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3\Delta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.20}$$

De ellas obtenemos:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2\Delta}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3\Delta}}{\delta_{33}}.$$

Dado que las magnitudes δ_{11}, δ_{22} y δ_{33} se pueden presentar, como fuera hecho anteriormente, en la forma $\delta_{11} = \frac{A}{EJ_0}$, $\delta_{22} = \frac{B}{EJ_0}$ y $\delta_{33} = \frac{C}{EJ_0}$, donde A, B y C son números y EJ_0, la rigidez de una sección cualquiera, entonces,

$$X_1 = -EJ_0 \frac{\Delta_{1\Delta}}{A}; \qquad X_2 = -EJ_0 \frac{\Delta_{2\Delta}}{B};$$

$$X_3 = -EJ_0 \frac{\Delta_{3\Delta}}{C}.$$

Por consiguiente, durante el desplazamiento de los apoyos, todas las incógnitas básicas son proporcionales a la rigidez del arco.

Los términos independientes de las ecuaciones canónicas se determinan por la fórmula

$$\Delta_{h\Delta} = -\sum \overline{R}_h \Delta_h, \tag{17.21}$$

donde Δ_h es el desplazamiento de los apoyos;

$\overline{R}_k$, la componente de la reacción de apoyo en el sistema básico, debida a $X_k = 1$, por la dirección del desplazamiento Δ_k.

El signo del producto $\overline{R}_k\Delta_k$ se establece por el signo del trabajo de la fuerza $\overline{R}_k$, realizado en el desplazamiento, por su dirección Δ_k.

Los términos independientes también pueden ser determinados por vía puramente geométrica. Para esto, es necesario comunicarle al sistema básico los desplazamientos imprimidos a los apoyos y, después, determinar geométricamente los desplazamientos $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$ y $\Delta_{3\Delta}$.

Mostremos ambos procedimientos de determinación de los desplazamientos del sistema básico por la dirección de las incógnitas

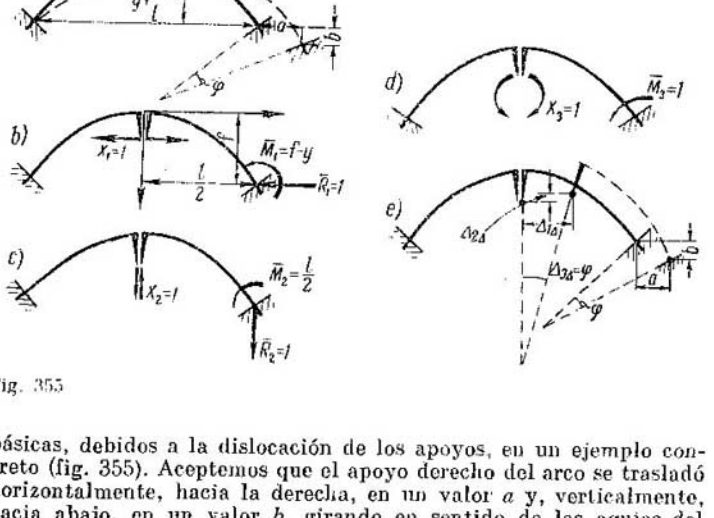


Fig. 355

básicas, debidos a la dislocación de los apoyos, en un ejemplo concreto (fig. 355). Aceptemos que el apoyo derecho del arco se trasladó horizontalmente, hacia la derecha, en un valor a y, verticalmente, hacia abajo, en un valor b, girando en sentido de las agujas del reloj un ángulo φ (fig. 355, *a*). Las reacciones unitarias en el sistema básico, debidas a $X_k = 1$, se muestran en la fig. 355, *b*, *c*, *d*. Por la fórmula (17.21), tenemos:

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum \overline{R}_i\Delta_i = -[-1\cdot a-(f-c)\,\varphi] = a+(f-c)\,\varphi;$$

$$\Delta_{2\Delta} = -\sum \overline{R}_2\Delta_2 = -\left(+1\cdot b-\frac{l}{2}\,\varphi\right) = -b+\frac{l}{2}\,\varphi;$$

$$\Delta_{3\Delta} = -\sum \overline{R}_3\Delta_3 = -(-1\cdot\varphi) = \varphi.$$

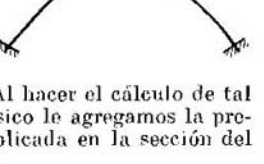
Para determinarlas geométricamente examinemos los desplazamientos del sistema básico (fig. 355, *e*). Por consideraciones geométricas obtenemos que

$$\Delta_{1\Delta} = a + (f - c)\,\varphi; \qquad \Delta_{2\Delta} = -b + \frac{l}{2}\,\varphi; \qquad \Delta_{3\Delta} = \varphi,$$

es decir, las mismas magnitudes que obtuvimos por la fórmula (17. 21).

§ 174. CALCULO DE LOS ARCOS SIN ARTICULACIONES CON EL EJE A LO LARGO DE LA CURVA DE PRESION EN EL ARCO TRIARTICULADO. Si la carga está aplicada a lo largo del eje del arco, la curva de presiones para los arcos triarticulados coincide con la curva funicular siendo, para ellos, el eje racional, para el cual, los momentos flectores debidos a la carga son iguales a cero. En el arco sin articulaciones con la misma configuración, los momentos flectores, como veremos más abajo, a consecuencia de la deformación del arco, debida a la fuerza longitudinal llamada compresión

Fig. 356



elástica del arco, ya no son iguales a cero. Al hacer el cálculo de tal arco, a la carga que actúa en el sistema básico le agregamos la presión horizontal H del arco triarticulado, aplicada en la sección del sistema básico (fig. 356).

En este caso, los momentos flectores M_P^0, en el sistema básico, son iguales a cero, ya que la configuración del eje del arco ha sido tomada por el eje de presión. Dado que los momentos flectores son iguales a cero, también lo serán las fuerzas transversales Q_P^0, quedando sólo las fuerzas longitudinales $N_P^0 = \frac{N}{\cos\alpha}$.

La incógnita de simetría inversa X_2, debida a la carga simétrica, es igual a cero. Para tal caso, las ecuaciones canónicas serán:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{13}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Por cuando $M_P^0 = 0$ y $Q_P^0 = 0$, entonces Δ_{3P} y, por consiguiente, X_3 son iguales a cero. Nos queda determinar sólo X_1. El desplazamiento de carga es

$$\frac{\Delta_{1P}}{2} = \int_0^{l/2} \bar{N}_1 \frac{N_P^0}{EF} \cdot \frac{dz}{\cos\alpha} = \int_0^{l/2} \frac{H}{\cos\alpha EF}\,dz$$

o bien

$$\frac{\Delta_{1P}}{2} = H \int_0^{l/2} \frac{dz}{EF \cos \alpha}.$$

Por consiguiente:

$$X_1 = -\frac{2H}{\delta_{11}} \int_0^{l/2} \frac{dz}{EF \cos \alpha}. \qquad (17.22)$$

El diagrama de los momentos flectores, debidos a la compresión elástica, tendrá la misma forma que el de los momentos flectores debidos al calentamiento uniforme (véase la fig. 354).

§ 175. SOBRE EL ARCO NO ARTICULADO SIN MOMENTOS. En el § 174 se mostró que en un arco sin articulaciones, con configuración a lo largo de la curva de presión de un arco triarticulado,

Fig. 357

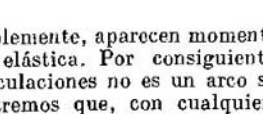
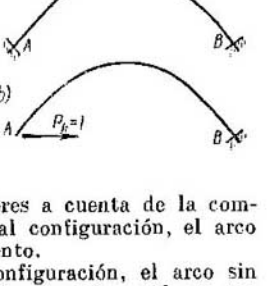


Fig. 358



inevitablemente, aparecen momentos flectores a cuenta de la compresión elástica. Por consiguiente, con tal configuración, el arco sin articulaciones no es un arco sin momento.

Mostremos que, con cualquier otra configuración, el arco sin articulaciones no puede ser sin momento. La cuestión reside en que la deformación del arco sin articulaciones, para la posición dada de sus apoyos, siempre está ligada a la variación de la curvatura (fig. 357) y, por consiguiente, a la aparición de momentos flectores y, por eso, *cualquiera que sea su configuración*, el arco no puede ser sin momento. Esta tesis se puede demostrar de otro modo. Supongamos que el arco sin articulaciones puede existir sin momento (fig. 358). De todas las fuerzas sustituyentes que hay en él, sólo la longitudinal $N_P = \frac{H}{\cos \alpha}$ no es igual a cero. Determinemos el desplazamiento horizontal del punto A, que, de antemano, deberá ser igual a cero. Para esto, al sistema isostático básico le aplicamos, por las reglas conocidas, la fuerza auxiliar $P_k = 1$ (fig. 358, *b*). En este sistema, las fuerzas internas debidas a $P_k = 1$ son distintas de cero, además,

$\overline{N}_k = \cos\alpha$. Por eso, el desplazamiento buscado del punto A se determina por la expresión.

$$\Delta_{kP} = \sum \int \cos\alpha \frac{H}{\cos\alpha} \frac{dz}{EF\cos\alpha} \neq 0.$$

Este resultado contradice a la suposición de que los momentos flectores en el arco son iguales a cero, lo que significa que la admisión aceptada es falsa.

Lo dicho se refiere también a los arcos biarticulados. Ninguna variación del eje del arco elimina los momentos flectores; éstos pueden ser distribuidos racionalmente a lo largo del arco.

Hablando en rigor, el eje del arco triarticulado, configurado por la curva de presión para el estado indeformado del arco, tampoco existe sin momento, ya que las deformaciones del arco, a consecuencia de la compresión, están ligadas a la variación de la curvatura de la barra y a la aparición de momentos flectores en el arco (v. [1]).

§ 176. REGULACION DE LAS TENSIONES EN LOS ARCOS SIN ARTICULACIONES. En un arco sin articulaciones, configurado a lo largo de la curva de presión del arco triarticulado, durante la compresión elástica, surgen momentos flectores. Si durante la

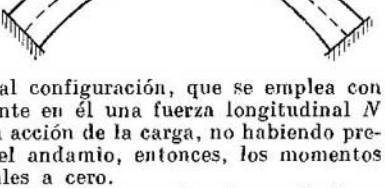


Fig. 359

construcción de un arco con tal configuración, que se emplea con frecuencia, se crea artificialmente en él una fuerza longitudinal N igual a la que se origina bajo la acción de la carga, no habiendo presión sobre el arco por parte del andamio, entonces, los momentos flectores en el arco serán iguales a cero.

Esto se puede hacer por medio de gatos colocados en la llave del arco aún no cerrado (fig. 359). Comúnmente, los gatos se colocan a ambos lados del eje del arco y pueden crear fuerza longitudinal y momento flector en la llave del arco.

Para que los momentos flectores debidos a una carga permanente se hagan iguales a cero, es necesario originar con los gatos, con la carga en acción y el andamio quitado, las presiones Z_1 y Z_2 iguales entre sí y, en la suma, iguales a la presión horizontal del arco triarticulado debido a esta carga, es decir,

$$Z_1 = Z_2 = \frac{H}{2}. \qquad (17.23)$$

Señalamos que, con tal presión en los gatos, teóricamente, el arco ya no deberá ejercer presión sobre el andamio, pudiendo éste ser quitado fácilmente.

En el arco, con ayuda de los mismos gatos, pueden ser creadas, complementariamente, tensiones previas artificiales, que equilibran las tensiones debidas a la carga accidental, a la acción de la temperatura y a la contracción del hormigón. Por cuanto los gatos pueden crear fuerza axil y momento flector en la llave del arco, entonces, las dos condiciones dadas pueden ser satisfechas. Por ejemplo, en el arranque y en la llave del arco (o en otras dos secciones), se pueden crear artificialmente tales fuerzas complementarias internas, con ayuda de las cuales, las tensiones teóricas de borde, desiguales en las partes superior e inferior de la sección del arco, debidas a la carga permanente, a la acción de la temperatura y a la carga accidental, ubicada en las posiciones de cálculo (fig. 360), se hacen iguales.

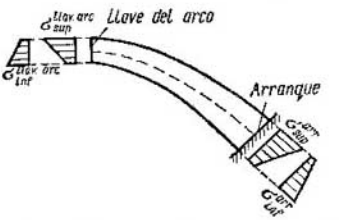


Fig. 360

En los razonamientos expuestos más arriba no se ha considerado el fenómeno de escurrimiento plástico del material, que con el tiempo puede debilitar considerablemente el efecto del estado de tensión creado artificialmente en el arco. *Por eso, al crear en el arco el estado de tensión inicial, se debe tener en cuenta el escurrimiento plástico del material.*

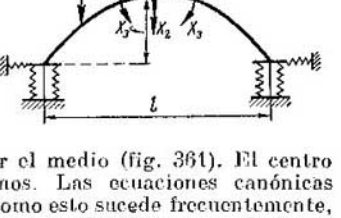
Para concluir, examinemos un procedimiento artificial más que permite disminuir los momentos flectores en el arco, debidos a su compresión en el caso de carga constante. El arco, con la configuración a lo largo de la curva de presión del arco triarticulado, se erige y descimbra como el triarticulado. La compresión en el arco tiene lugar en el caso de carga constante. En éste surgen momentos flectores. Pero debido a que la curva de presión se fija con tres articulaciones, ellos serán menores que los momentos flectores debidos a la misma compresión, que surgirían en el arco sin articulaciones. Después del descimbramiento del arco, sus articulaciones se cierran y resulta sin articulaciones. De esta manera, el arco trabaja bajo la carga constante como triarticulado y, bajo todas las restantes, como sin articulaciones. El procedimiento examinado de disminución de los momentos flectores debidos a la carga permanente también puede ser empleado para los arcos biarticulados.

Los momentos flectores en los arcos triarticulados de configuración racional debidos a la compresión de la carga constante pueden ser también eliminados con ayuda de gatos. Para esto es necesario crear en los gatos presiones iguales a la mitad de la presión horizon-

tal debida a la carga permanente, y efectuar el centramiento del arco con una articulación para la flecha de arco dada y el andamio debilitado o quitado. Una subsiguiente regulación de las tensiones en los arcos triarticulados no es posible, dado que ellos son isostáticos y no pueden tener tensiones preliminares.

§ 177. CALCULO DE ARCOS SIN ARTICULACIONES SOBRE APOYOS ELASTICOS. Si los apoyos de un arco son elásticos, entonces, bajo carga, los arranques del arco se desplazan, lo que se refleja en su trabajo. Estas dislocaciones de los apoyos se deberán tener en cuenta al hacer el cálculo del arco. El sistema básico para el cálculo

Fig. 361



lo formamos seccionando el arco por el medio (fig. 361). El centro elástico, por ahora, no lo empleamos. Las ecuaciones canónicas para los arcos simétricos colocados, como esto sucede frecuentemente, sobre apoyos elásticos, con diferente compresibilidad, tienen la forma

$$a_{k1}X_1 + a_{k2}X_2 + a_{k3}X_3 + \Delta_{kP} = 0 \qquad (17.24)$$

para $k = 1$, 2 y 3.

Los coeficientes y términos de carga, para ellos, son:

$$\left.\begin{aligned} a_{km} &= \delta_{km} + b_{km}; \\ \Delta_{kP} &= \Delta_{kP} + B_{kP}, \end{aligned}\right\} \qquad (17.25)$$

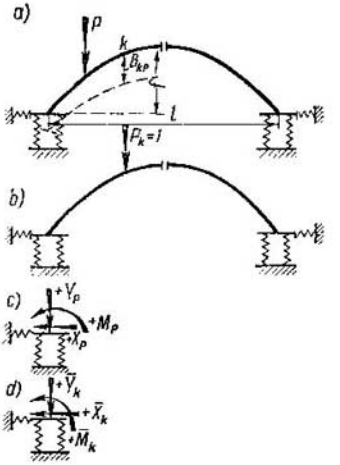
donde δ_{km} y Δ_{kP} son los desplazamientos originados por la deformación del arco;

b_{km} y B_{kP}, los desplazamientos debidos a las dislocaciones de los apoyos elásticos.

Las magnitudes δ_{km} y Δ_{kP} se determinan, como antes, por el procedimiento corriente, pero, para la determinación de los desplazamientos del tipo b_{km} y B_{kP}, obtendremos fórmulas especiales.

Para esto empleamos el principio de los posibles desplazamientos, examinando el trabajo de la fuerza $P_k = 1$ en los desplazamientos debidos a la carga, originados por las dislocaciones elásticas de los apoyos del arco (fig. 362, *a*). Este trabajo es igual al de las presiones debidas a $P_k = 1$ sobre el apoyo elástico (fig. 362, *d*), el desplazamiento del cual, debido a la carga, se puede expresar por medio de la presión de esta carga sobre este apoyo (fig. 362, *c*).

Fig. 362



Si las presiones y el momento debidos a la carga, aplicados en el apoyo elástico, se designan con Y_P, X_P y M_P, y los desplazamientos de traslación y angular del arranque del arco en el sistema básico, debidos a $Y=1$ con δ^{ap}_{YY}, δ^{ap}_{XY}, δ^{ap}_{MY}; a los debidos a $X=1$, con δ^{ap}_{YX}, δ^{ap}_{XX}, δ^{ap}_{MX} y a los debidos a $M=1$, con δ^{ap}_{YM}, δ^{ap}_{XM}, δ^{ap}_{MM}, entonces, para el apoyo izquierdo, el trabajo de la presión debida a la fuerza $P_k=1$ sobre los desplazamientos debidos a la carga, se expresa así:

$$1B_{kP}=\overline{Y}_k(\delta^{ap}_{YY}Y_P+\delta^{ap}_{YX}X_P+\delta^{ap}_{YM}M_P)+$$
$$+\overline{X}_k(\delta^{ap}_{XY}Y_P+\delta^{ap}_{XX}X_P+\delta^{ap}_{XM}M_P)+$$
$$+\overline{M}_k(\delta^{ap}_{MY}Y_P+\delta^{ap}_{MX}X_P+\delta^{ap}_{MM}M_P). \qquad (17.26)$$

De esta fórmula, sustituyendo Y_P, X_P y M_P por $\overline{Y}_m$, $\overline{X}_m$ y $\overline{M}_m$ obtenemos

$$1\cdot b_{km}=\overline{Y}_k(\delta^{ap}_{YY}\overline{Y}_m+\delta^{ap}_{YX}\overline{X}_m+\delta^{ap}_{YM}\overline{M}_m)+$$
$$+\overline{X}_k(\delta^{ap}_{XY}\overline{Y}_m+\delta^{ap}_{XX}\overline{X}_m+\delta^{ap}_{XM}M_m)+$$
$$+\overline{M}_k(\delta^{ap}_{MY}\overline{Y}_m+\delta^{ap}_{MX}\overline{X}_m+\delta^{ap}_{MM}\overline{M}_m). \qquad (17.27)$$

Las fórmulas para el apoyo derecho se componen análogamente.

La simplificación del cálculo, es posible trasladando las fuerzas al centro elástico del sistema. Las coordenadas c_1 y d_1 del centro elástico se determinan de las condiciones $a_{13}=a_{23}=0$. Una vez trasladadas las fuerzas al centro elástico, las ecuaciones canónicas toman la forma:

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+A_{1P}=0;$$
$$a_{21}X_1+a_{22}X_2+A_{2P}=0; \qquad (17.28)$$
$$a_{33}X_3+A_{3P}=0.$$

Si el arco es simétrico y está ubicado sobre apoyos simétricos, entonces, las ecuaciones canónicas para este arco sin trasladar las

fuerzas al centro elástico, tendrán la misma forma que las ecuaciones (17.28):

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{13}X_3 + A_{1P} &= 0; \\ a_{31}X_1 + a_{33}X_3 + A_{3P} &= 0; \\ a_{22}X_2 + A_{2P} &= 0. \end{aligned} \tag{17.29}$$

Se puede seguir simplificándolas, trasladando las fuerzas al centro elástico, cuya posición se determina de la condición $a_{13} = \delta_{13} + b_{13} = 0$.

En este caso obtenemos que

$$\int_0^{l/2} (y - c_1) \frac{dz}{EJ \cos \alpha} + 1 \cdot \delta_{XM}^{ap} (+1) + (f - c_1) \delta_{MM}^{ap} (+1) = 0,$$

de donde

$$c_1 = \left(\int_0^{l/2} y \frac{dz}{EJ \cos \alpha} + \delta_{XM}^{ap} + f \delta_{MM}^{ap} \right) : \left(\int_0^{l/2} \frac{dz}{EJ \cos \alpha} + \delta_{MM}^{ap} \right). \tag{17.30}$$

Si en calidad de apoyo elástico, se examina un fundamento rígido sobre base elástica (fig. 363), entonces, es necesario representar a todas las dislocaciones del apoyo por medio del desplazamiento de la base de fundamento, a la cual debemos referir las fuerzas contenidas en las fórmulas (17.26) y (17.27). En este caso, los desplazamientos secundarios del apoyo elástico son iguales a cero y sólo quedan los principales δ_{YY}^{ap}, δ_{XX}^{ap} y δ_{MM}^{ap}. A consecuencia de esto, las fórmulas (17.26) y (17.27) se hacen más simples.

Fig. 363

El cálculo de la influencia de la deformación del suelo, bajo los apoyos macizos del arco, representa una tarea complicada. Su resolución aproximada es posible sobre la base de las siguientes admisiones groseras: 1) el fundamento es considerado absolutamente rígido; 2) la presión sobre el suelo se trasmite sólo por la base de fundamento y 3) las fuerzas de resistencia del suelo por la base de

Fig. 364

fundamento, es proporcional a las dislocaciones. Con estas admisiones, tendremos que:

$$\delta_{YY}^{ap} = \frac{1}{k_Y F_{fund}}, \qquad \delta_{XX}^{ap} = \frac{1}{k_X F_{fund}}, \qquad \delta_{MM}^{ap} = \frac{2}{kJ_{fund}}, \quad (17.31)$$

donde F_{fund} y J_{fund} son la superficie y el momento de inercia de la base de fundamento (fig. 364) y, k_y, k_x y k, los coeficientes de compresibilidad de la base.

Si los apoyos del arco son simétricos, entonces, tiene sentido trasladar las incógnitas al centro elástico, el cual se determina por la fórmula (17.30), sólo que aquí, en ella en lugar de f, es necesario colocar la magnitud $f + h$ (fig. 364):

$$c_1 = \left(\int_0^{l/2} y \frac{dz}{EJ \cos \alpha} + \frac{f + h}{kJ_{fund}} \right) : \left(\int_0^{l/2} \frac{dz}{EJ \cos \alpha} + \frac{1}{kJ_{fund}} \right). \quad (17.32)$$

En este caso, la ecuaciones canónicas serán:

$$a_{11}X_1 + A_{1P} = 0;$$
$$a_{22}X_2 + A_{2P} = 0;$$
$$a_{33}X_3 + A_{3P} = 0.$$

§ 178. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS INCOGNITAS BASICAS, DE LOS MOMENTOS FLECTORES Y DE LAS FUERZAS LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES EN EL ARCO SIN ARTICULACIONES

1. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS INCOGNITAS BASICAS

Examinemos la acción, sobre el arco, de la fuerza concentrada P, aplicada a la distancia a desde el origen de coordenadas (fig. 365, *a*).

En el sistema básico, las fuerzas internas estarán sólo a la derecha de esta fuerza P, o sea, para $a \leqslant z \leqslant l/2$.

Las expresiones de estas fuerzas son las siguientes:

$$M_P^0 = -P(z-a), \qquad N_P^0 = P \operatorname{sen} \alpha, \qquad Q_P^0 = -P \cos \alpha.$$

Las expresiones de los términos de carga de las ecuaciones canónicas son:

$$\Delta_{1P} = -\int_a^{l/2} (y-c) \frac{P(z-a)}{EJ \cos \alpha} dz + \int_a^{l/2} \cos \alpha \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{EJ \cos \alpha} dz -$$

$$-\int_a^{l/2} \mu \operatorname{sen}\alpha \frac{P\cos\alpha}{GF\cos\alpha}\,dz = P\psi_1(a); \tag{17.33}$$

$$\Delta_{2P} = -\int_a^{l/2} z\,\frac{P(z-a)}{EJ\cos\alpha}\,dz - \int_a^{l/2} \operatorname{sen}\alpha \frac{P\operatorname{sen}\alpha}{EF\cos\alpha}\,dz + \int_a^{l/2} \mu\cos\alpha\,\frac{P\cos\alpha}{GF\cos\alpha}\,dz = P\psi_2(a); \tag{17.34}$$

$$\Delta_{3P} = -\int_0^{l/2} 1\,\frac{P(z-a)}{EJ\cos\alpha}\,dz = P\psi_3(a). \tag{17.35}$$

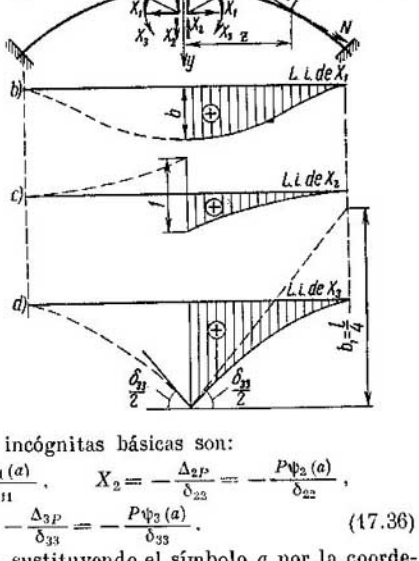


Fig.365

Las expresiones de las incógnitas básicas son:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{P\psi_1(a)}{\delta_{11}}, \qquad X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}} = -\frac{P\psi_2(a)}{\delta_{22}},$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}} = -\frac{P\psi_3(a)}{\delta_{33}}. \tag{17.36}$$

Dividiéndolas por P y, sustituyendo el símbolo a por la coordenada variable z, obtenemos las ecuaciones de las líneas de influencia de las incógnitas básicas para la posición del peso sobre la mitad derecha del arco:

$$\text{l.i. de } X_1 = -\frac{\psi_1(z)}{\delta_{11}}, \quad \text{l.i. de } X_2 = -\frac{\psi_2(z)}{\delta_{22}},$$

$$\text{l.i. de } X_3 = -\frac{\psi_3(z)}{\delta_{33}}. \tag{17.37}$$

Para la posición del peso sobre la mitad izquierda del arco, las líneas de influencia pueden ser construidas por la condición de simetría. Las líneas de influencia de las incógnitas simétricas son simétricas y las de las inversamente simétricas, de simetría inversa. Esta conclusión se desprende del método cinemático de construcción de las líneas de influencia, la forma de las cuales se muestra en la fig. 365, *b*, *c*, *d*.

Las verificaciones de las líneas de influencia pueden efectuarse del siguiente modo.

LINEA DE INFLUENCIA DE X_1 (VERIFICACION APROXIMADA)

Supongamos que la l.i. de X_1 se determina aproximadamente por la ecuación de una curva semejante a ella

$$X_1 = \frac{b}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi z}{l}\right), \tag{17.38}$$

donde b es la ordenada de la l.i. de X_1 para $z = 0$.

Para el caso de una carga uniforme q, la presión horizontal del arco sin articulaciones es semejante a la del arco triarticulado. Por eso,

$$2\int_0^{l/2} q\frac{b}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi z}{l}\right)dz \approx \frac{ql^2}{8f},$$

de donde obtenemos que

$$b \approx \frac{l}{4f}. \tag{17.39}$$

Esta fórmula de aproximación puede descubrir, sólo, los errores de cálculo groseros.

LINEA DE INFLUENCIA DE X_2

$$\text{l.i. de } X_2 = -\frac{\delta_{2P}}{\delta_{22}} = -\frac{\delta_{P2}}{\delta_{22}}.$$

Como fue expuesto anteriormente, la línea de influencia es el diagrama de los desplazamientos δ_{P2} si el desplazamiento δ_{22}, es decir, la fractura por la dirección X_2, se toma igual a la unidad negativa. Esto es, precisamente, la verificación de la l.i. de X_2.

LINEA DE INFLUENCIA DE X_3

$$\text{l.i. de } X_3 = -\frac{\delta_{3P}}{\delta_{33}} = -\frac{\delta_{P3}}{\delta_{33}}.$$

Efectuando razonamientos análogos, llegamos a la conclusión de que la línea de influencia es el diagrama de los desplazamientos δ_{P3}, si el desplazamiento δ_{33} se toma igual a la unidad negativa. En este caso, δ_{33} es la suma de los ángulos de giro de las tangentes al diagrama de δ_{P3} en el medio del arco, los cuales, debido a su pequeñez, pueden ser sustituidos por las tangentes. Analíticamente, considerando el signo de la l.i. de X_3 (fig. 365, *d*), esta condición puede ser representada en la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial X_3}{dz}\right)_{z=0} = -\frac{1}{2}. \tag{17.40}$$

Por eso, la tangente y la horizontal, trazadas en el medio de la l.i. de X_3, cortarán en la vertical, por debajo del apoyo, un segmento $b_1 = 4$, en la escala de la línea de influencia.

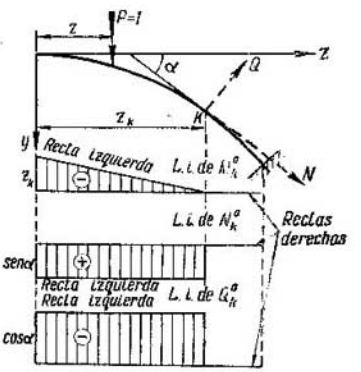
2. LINEAS DE INFLUENCIA DE M, N Y Q EN LA SECCION

Escribimos las expresiones de las líneas de influencia de las fuerzas internas, por (14.77), en la forma general:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{l.i. de } M_k = (\text{l.i. de } X_1)(y_k - c) + \\
&\quad + (\text{l.i. de } X_2)\, z_k + (\text{l.i. de } X_3)\, 1 + \text{l.i. de } M_k^0; \\
&\text{l.i. de } N_k = (\text{l.i. de } X_1)\cos\alpha_k - \\
&\quad - (\text{l.i. de } X_2)\,\text{sen}\,\alpha_k + \text{l.i. de } N_k^0; \\
&\text{l.i. de } Q_k = (\text{l.i. de } X_1)\,\text{sen}\,\alpha_k + \\
&\quad + (\text{l.i. de } X_2)\cos\alpha_k + \text{l.i. de } Q_k^0.
\end{aligned}\right\} \quad (17.41)$$

De esta manera, las líneas de influencia de las fuerzas internas se componen de las líneas de influencia de las incógnitas básicas

Fig. 366



multiplicadas por magnitudes constantes, por las expresiones (14.41), y de las líneas de influencia de las correspondientes fuerzas internas en la misma sección del sistema básico. En la fig. 366 están representadas las líneas de influencia de M_k^0, Q_k^0 y N_k^0 en el sistema básico, para las secciones sobre la mitad derecha del arco. Sus ecuaciones son las siguientes:

el peso se halla a la izquierda de la sección $(0 \leqslant z \leqslant z_k)$

$$M_k^0 = -1(z_k - z),\quad N_k^0 = 1\,\text{sen}\,\alpha_k,\quad Q_k^0 = -1\cos\alpha_k;$$

el peso se halla a la derecha de la sección $\left(z_k \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}\right)$

$$M_k^0 = 0;\quad N_k^0 = 0;\quad Q_k^0 = 0.$$

Las líneas de influencia del momento flector y de la fuerza axil son diferentes por su forma. Por eso, para la determinación de las tensiones mayores de borde en el arco, cuando estas pueden ser determinadas por las fórmulas (8.31), es necesario emplear las líneas de

influencia de las tensiones de borde (8.32) o las de los momentos nucleares, las cuales pueden ser construidas independientemente de las líneas de influencia de M y N, por cuanto las tensiones se expresan por medio de ellas, por las fórmulas monomias

$$\sigma_1 = M_{k_1}^{\text{nucl}} : W_1, \quad \sigma_2 = -M_{k_2}^{\text{nucl}} : W_2. \tag{17.42}$$

Las líneas de influencia de los momentos nucleares se expresan por medio de las líneas de influencia de las incógnitas básicas, del siguiente modo:

$$\text{l.i. de } M_{k_1}^{\text{nucl}} = (\text{l.i. de } X_1)(y_{k_1} - c) + (\text{l.i. de } X_2)\, z_{k_1} + \\ + (\text{l.i. de } X_3)\, 1 + \text{l.i. de } M_{k_1}^{0}; \tag{17.43}$$

$$\text{l.i. de } M_{k_2}^{\text{nucl}} = (\text{l.i. de } X_1)(y_{k_2} - c) + (\text{l.i. de } X_2)\, z_{k_2} + \\ + (\text{l.i. de } X_3)\, 1 + \text{l.i. de } M_{k_2}^{0}, \tag{17.44}$$

donde z_k e y_k son las coordenadas de los puntos nucleares;

l.i. de $M_{k_1}^{0}$ y l.i. de $M_{k_2}^{0}$, las líneas de influencia de los momentos nucleares en el sistema básico.

Las ecuaciones de la línea de influencia de los momentos nucleares en el sistema básico son:

el peso se halla a la izquierda de la sección $(0 \leqslant z \leqslant z_k)$

$$M_{k_1}^{0} = -1\,(z_{k_1} - z), \quad M_{k_2}^{0} = -1\,(z_{k_2} - z);$$

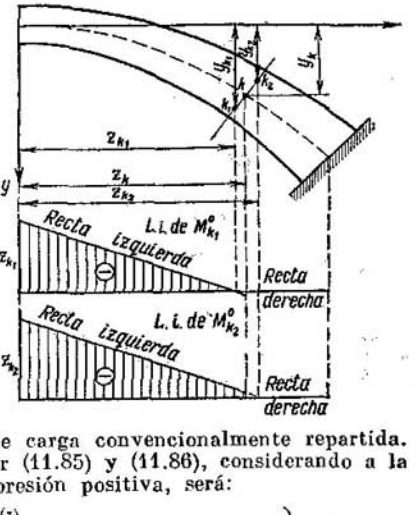
el peso se halla a la derecha de la sección $\left(z_k \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}\right)$

$$M_{k_1}^{0} = M_{k_2}^{0} = 0.$$

Las rectas izquierda y derecha se cortan por debajo de los puntos de momento (fig. 367). Las líneas de influencia de los momentos nucleares, por debajo del punto central k de la sección, tienen fracturas de magnitud sen $\alpha_k \frac{W}{F}$, y, las de las tensiones, de magnitud $\frac{\text{sen}\,\alpha_k}{F}$. Para las secciones en el medio del arco, donde $\alpha = 0$, las fracturas son iguales a cero.

§ 179. METODO GRAFICO-ANALITICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS INCOGNITAS BASICAS EN EL ARCO SIN ARTICULACIONES. El método gráfico-analítico de construcción de las líneas de influencia de las incógnitas básicas consiste en que los diagramas de los desplazamientos verticales δ_{pk}, por medio de los cuales, por el método cinemático, se expresan las líneas de influencia, se obtienen como diagramas de los momentos de la carga convencionalmente repartida en la viga convencional. En el § 108 fue aclarado que la viga convencional, para la parte derecha del sistema básico, posee empotramiento a la izquierda y, el extremo libre, a la derecha (fig. 368). En la fig. 368, *a*, *b*,

Fig. 367



se exponen dos variantes de carga convencionalmente repartida. Su intensidad para δ_{pm}, por (11.85) y (11.86), considerando a la fuerza longitudinal de compresión positiva, será:

$$\left.\begin{aligned} q^*_m(z) &= q^{**}_m(z) + \frac{dm^*_m(z)}{dz}\ ; \\ q^{**}_m(z) &= \left(-\frac{\overline{M}m}{\cos\alpha EJ'} - \frac{\overline{M}m}{\cos\alpha\, EF\rho^2} - \frac{\overline{N}m}{\cos\alpha\, EF\rho} \right); \\ m^*_m(z) &= -\left(\frac{\overline{N}_m \operatorname{tg}\alpha}{EF} - \mu' \frac{\overline{Q}_m}{GF} + \frac{\overline{M}_m \operatorname{tg}\alpha}{EF\rho} \right). \end{aligned}\right\} \qquad (17.45)$$

para $m = 1, 2, 3$.

La ecuación diferencial de los desplazamientos es

$$\frac{d^2\delta_{pm}}{dz^2} = q^{**}_m(z) + \frac{dm^*_m(z)}{dz}. \qquad (17.46)$$

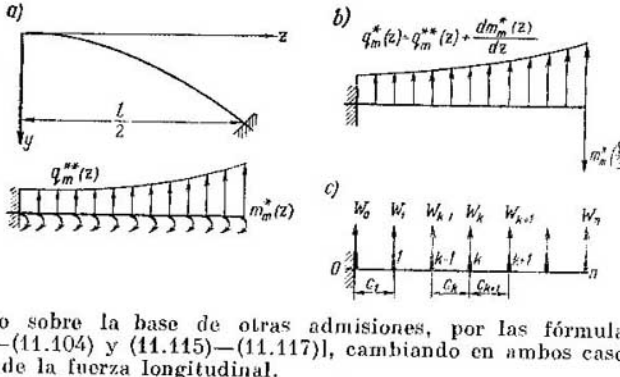
Las condiciones límites en el empotramiento, para $z = \frac{l}{2}$, son

$$\delta_{pm} = 0,\ \frac{d\delta_{pm}}{dz} = m^*_m\left(\frac{l}{2}\right). \qquad (17.47)$$

Sin tener en cuenta la curvatura, todas las expresiones se simplifican.

En los casos, cuando la ecuación diferencial (17.46) no se integra en funciones elementales, es indispensable pasar a los pesos elásticos concentrados debidos a $X_m = 1$. Las expresiones para los pesos elásticos, al sustituir el arco por una viga quebrada con los valores medios de J y F por sectores, pueden ser obtenidas por la fórmula

Fig. 368



(11.80) o sobre la base de otras admisiones, por las fórmulas [(11.97)—(11.104) y (11.115)—(11.117)], cambiando en ambos casos el signo de la fuerza longitudinal.

Así, por ejemplo, por la fórmula (11.80), teniendo en cuenta a N y Q y sin considerar la curvatura, tendremos que: 1) Pesos elásticos intermedios (véase la fig. 230)

$$W_{km} = W_{km}^{(M)} + W_{km}^{(N)} + W_{km}^{(Q)} = -\left[\frac{c_k}{6\cos\alpha_k EJ_k}(\overline{M}_{(k-1)m} + 2\overline{M}_{km}) + \right.$$
$$+ \left.\frac{c_{k+1}}{6\cos\alpha_{k+1}EJ_{k+1}}(2\overline{M}_{km} + \overline{M}_{(k+1)m})\right] -$$
$$-\left[\frac{\overline{N}^{\text{der}}_{km} + N^{\text{izq}}_{(k+1)m}}{2EF_{k+1}}\operatorname{tg}\alpha_{k+1} - \frac{\overline{N}^{\text{der}}_{(k-1)m} + \overline{N}^{\text{izq}}_{km}}{2EF_k}\operatorname{tg}\alpha_k\right] +$$
$$+\left[\mu_{k+1}\frac{Q^{\text{der}}_{km} + Q^{\text{izq}}_{(k+1)m}}{2GF_{k+1}} - \mu_k\frac{\overline{Q}^{\text{der}}_{(k-1)m} + \overline{Q}^{\text{izq}}_{km}}{2GF_k}\right] \qquad (17.48)$$

para $m = 1, 2, 3$.

2. Pesos elásticos extremos desprendidos de Q_0^* y Q_n^* véase la fig. 228):

Izquierdo (en cero)

$$W_{0m} = -\left[\frac{c_1}{6\cos\alpha_1 EJ_1}(2\overline{M}_{0m} + \overline{M}_{1m})\right] - \left[\frac{\overline{N}^{\text{der}}_{0m} + \overline{N}^{\text{izq}}_{1m}}{2EF_1}\operatorname{tg}\alpha_1\right] +$$
$$+\left[\mu_1\frac{\overline{Q}^{\text{der}}_{0m} + \overline{Q}^{\text{izq}}_{1m}}{2GF_1}\right].$$

Derecho (último)

$$W_{nm} = -\left[\frac{c_n}{6\cos\alpha_n EJ_n}(\overline{M}_{(n-1)m} + 2\overline{M}_{nm})\right] +$$
$$+\left[\frac{\overline{N}^{\text{der}}_{(n-1)m} + \overline{N}^{\text{izq}}_{nm}}{2EF_n}\operatorname{tg}\alpha_n\right] - \left[\mu_n\frac{\overline{Q}^{\text{der}}_{(n-1)m} + \overline{Q}^{\text{izq}}_{nm}}{2GF_n}\right].$$

Para $c_k = c_{k+1} = c$ las fórmulas resultan más simples.

Los desplazamientos propios pueden ser calculados por la fórmula obtenida sobre la base de (11.44):

$$\delta_{mm} = -\sum_{k=0}^{n} W_{km}^{(M)} \cdot \overline{M}_{km} + \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{c_k}{6EF_k \cos \alpha_k} (\overline{N}_{k-1}^{\text{der}} + \right.$$

$$+ 2\overline{N}_k^{\text{izq}}) \overline{N}_k^{\text{izq}} + \frac{c_{k+1}}{6EF_{k+1} \cos \alpha_{k+1}} (2\overline{N}_k^{\text{der}} + \overline{N}_k^{\text{izq}}) + \overline{N}_k^{\text{der}} \Big] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{c_k \mu_k}{6GF_k \cos \alpha_k} (\overline{Q}_{k-1}^{\text{der}} + 2\overline{Q}_k^{\text{izq}}) \overline{Q}_k^{\text{izq}} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_{k+1} \mu_{k+1}}{6GF_{k+1} \cos \alpha_{k+1}} (2\overline{Q}_k^{\text{der}} + \overline{Q}_{k+1}^{\text{izq}}) \overline{Q}_k^{\text{der}} \right]. \qquad (17.49)$$

La fórmula de $W_{km}^{(M)}$, compuesta por (11.97), tiene la forma:
1) Pesos elásticos intermedios

$$W_{km}^{(M)} = -\frac{c_0}{6EJ_0} \left[\frac{\overline{M}_{(k-1)m} J_0 c_k}{\cos \alpha_{k-1} J_{k-1} c_0} + \frac{2\overline{M}_{km} J_0}{\cos \alpha_k J_k} \cdot \frac{(c_k + c_{k+1})}{c_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{M}_{(k+1)m} J_0 c_{k+1}}{\cos \alpha_{k+1} J_{k+1} c_0} \right] \qquad (17.50)$$

para $m = 1, 2, 3$.
2) Pesos elásticos extremos desprendidos de Q_0^* y Q_n^*. Izquierdo (en cero)

$$W_{0m}^{(M)} = -\frac{c_0}{6EJ_0} \left(\frac{2\overline{M}_{0m} J_0 c_1}{\cos \alpha_0 J_0 c_0} + \frac{\overline{M}_{1m} J_0 c_1}{\cos \alpha_1 J_1 c_0} \right).$$

Derecho (último)

$$W_{nm}^{(M)} = -\frac{c_0}{6EJ_0} \left(\frac{\overline{M}_{(n-1)m} J_0 c_n}{\cos \alpha_{n-1} J_{n-1} c_0} + \frac{2\overline{M}_{nm} J_0 c_n}{\cos \alpha_n J_n c_0} \right)$$

Los pesos elásticos $W_{im}^{(N)}$ y $W_{mi}^{(Q)}$ pueden ser tomados de (17.48).

§ 180. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS INCOGNITAS BASICAS PARA LOS ARCOS SIN ARTICULACIONES DE CONFIGURACION ESPECIAL.

1. ARCO PARABOLICO

La forma del arco parabólico se determina por las expresiones

$$y = \frac{4fz^2}{l^2}, \qquad J = \frac{J_0}{\cos \alpha}.$$

La coordenada del centro elástico, por (17.4), es

$$c = \int_0^{l/2} \frac{4fz^2}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ_0} : \int_0^{l/2} \frac{dz}{EJ_0} = \frac{f}{3}.$$

La influencia de la curvatura y las fuerzas internas N y Q sobre los desplazamientos no las tomamos en cuenta. La ecuación diferencial de los desplazamientos verticales δ_{ph}, por (17.46), es

$$\frac{d^2\delta_{ph}}{dz^2} = -\frac{\overline{M}_h}{\cos\alpha EJ} = -\frac{\overline{M}_h}{EJ_0}. \qquad (17.51)$$

LINEA DE INFLUENCIA DE X_1

Por las fórmulas (17.5—17.7)

$$\frac{\delta_{11}}{2} = \int_0^{l/2} \left(\frac{4fz^2}{l^2} - \frac{f}{3}\right) \frac{4fz^2}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ_0} = \frac{2f^2 l}{45EJ_0}.$$

La ecuación diferencial de los desplazamientos δ_{P1}, por (17.51), es

$$\frac{d^2\delta_{P1}}{dz^2} = -\frac{\overline{M}_1}{EJ_0} = -\left(\frac{4fz^2}{l^2} - \frac{f}{3}\right) : EJ_0.$$

Integramos por primera vez

$$EJ_0 \frac{d\delta_{P1}}{dz} = -\left(\frac{4fz^3}{3l^2} - \frac{fz}{3} + C_1\right).$$

Para $z = \frac{l}{2}$ $\frac{d\delta_{P1}}{dz} = 0$ (sin tener en cuenta a N y Q), lo que da $C_1 = 0$.

Integramos por segunda vez

$$EJ_0\delta_{P1} = -\left(\frac{fz^4}{3l^2} - \frac{fz^2}{6} + D_1\right).$$

Para $z = \frac{l}{2}$, $\delta_{P1} = 0$, lo que da $D_1 = \frac{fl^2}{48}$.

La ecuación de la linea de influencia de X_1 es

$$\text{l.i. de } X_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}} = \frac{15}{64} \cdot \frac{l}{f}(1 - 8u^2 + 16u^4), \qquad (17.52)$$

donde $u = \frac{z}{l}$.

Verificación: para $u = 0$, $X_1 = \frac{15l}{64f}$, lo que se aproxima a la magnitud $\frac{l}{4f}$.

LINEA DE INFLUENCIA DE X_2

Por la fórmula (17.8)

$$\frac{\delta_{22}}{2} = \int_0^{l/2} z^2 \frac{dz}{EJ_0} = \frac{l^3}{24EJ_0}.$$

La ecuación diferencial de los desplazamientos δ_{P2} es

$$EJ_0 \frac{d^2\delta_{P2}}{dz^2} = -z.$$

Integramos por primera vez

$$EJ_0 \frac{d\delta_{P2}}{dz} = -\frac{z^2}{2} + C_2.$$

Para $z = \frac{l}{2}$ $\frac{d\delta_{P2}}{dz} = 0$, lo que da $C_2 = \frac{l^2}{8}$.

Integramos por segunda vez

$$EJ_0\delta_{P2} = -\frac{z^3}{6} + \frac{l^2 z}{8} + D_2.$$

Para $z = \frac{l}{2}$ $\delta_{P2} = 0$, lo que da $D_2 = -\frac{l^3}{24}$.

La ecuación de la línea de influencia de X_2 es

$$\text{l.i de } X_2 = -\frac{\delta_{P2}}{\delta_{22}} = \frac{1}{2}(1 - 3u + 4u^3). \qquad (17.53)$$

Verificación: para $u = 0$ $X_2 = \frac{1}{2}$.

LINEA DE INFLUENCIA DE X_3

Por la fórmula (17.9)

$$\frac{\delta_{33}}{2} = \int_0^{l/2} \frac{dz}{EJ_0} = \frac{l}{2EJ_0}.$$

La ecuación diferencial de los desplazamientos δ_{P3} es

$$EJ_0 \frac{d^2\delta_{P3}}{dz^2} = -1.$$

Integramos por primera vez

$$EJ_0 \frac{d\delta_{P3}}{dz} = -z + C_3.$$

Para $z = \frac{l}{2}$, $\frac{d\delta_{P3}}{dz} = 0$, lo que da $C_3 = \frac{l}{2}$.

Integramos por segunda vez

$$EJ_0\delta_{P3} = -\frac{z^2}{2} + \frac{l}{2}z + D_3$$

Siendo $z = \frac{l}{2}$, $\delta_{P3} = 0$, lo que da $D_3 = -\frac{l^2}{8}$.

La ecuación de la línea de influencia de X_3 es

$$\text{l.i. de } X_3 = -\frac{\delta_{P3}}{\delta_{33}} = \frac{l}{8}(1 - 4u + 4u^2). \qquad (17.54)$$

Verificación por la fórmula (17.40):

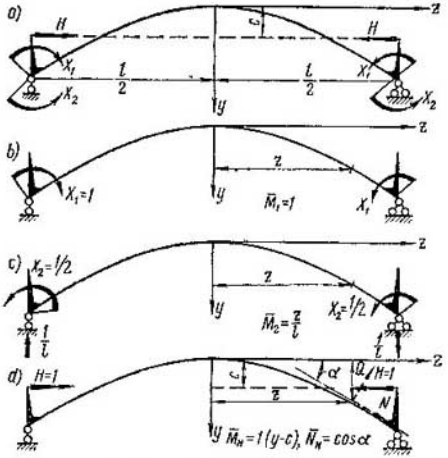
$$\frac{dX_3}{dz} = \frac{1}{l} \cdot \frac{dX_3}{du} = \frac{1}{8}(-4 + 8u), \text{ para } u = 0 \; \frac{dX_3}{dz} = -\frac{1}{2}.$$

2. ARCO CATENOIDE

La ecuación del eje del arco, por la fórmula (8.17), es

$$y = \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k\xi - 1).$$

Fig. 369



Las expresión del momento de inercia de la sección, por la fórmula (17.1), es

$$J = J_0 : \cos\alpha\,[1-(1-n)\,\xi], \qquad \text{donde } \xi = z : \frac{l}{2},$$

$$k = \operatorname{arch} m, \qquad m = q_n : q_0, \qquad n = J_0 : J_n \cos\alpha_n.$$

Formamos el sistema básico por la fig. 369, *b*. El cálculo lo efectuamos sin tener en cuenta la influencia de la curvatura, de Q y considerando, parcialmente, la influencia de N sobre los desplazamientos.

A las incógnitas básicas las designamos por X_1, X_2 y H (en lugar de X_3).

La ecuación diferencial de los desplazamientos verticales, por (17.46), es

$$\frac{d^2\delta_{Pk}}{dz^2} = -\frac{\bar{M}_k}{EJ_0}\,[1-(1-n)\,\xi].$$

Después de la sustitución, obtenemos

$$z = \xi\,\frac{l}{2}\,\frac{d^2\delta_{Pk}}{d\xi^2} = -\frac{\bar{M}_k}{EJ_0}\cdot\frac{l^2}{4}\,[1-(1-n)\,\xi]. \qquad (17.55)$$

Los pesos elásticos son $dv = \dfrac{ds}{EJ} = \dfrac{l\,d\xi}{2EJ_0}\,[1-(1-n)\,\xi]$.

LINEA DE INFLUENCIA DE X_1 (fig. 369, *b*)

$$\bar{M}_1 = 1;$$

$$\delta_{11} = 2\int_0^1 dv = 2\int_0^1 \frac{l}{2EJ_0}\,[1-(1-n)\,\xi]\,d\xi = \frac{l}{EJ_0}\cdot\frac{1+n}{2}. \qquad (17.56)$$

Por la expresión (17.55)

$$\frac{d^2\delta_{P1}}{d\xi^2} = -\frac{l^2}{4EJ_0}[1-(1-n)\xi].$$

Integramos por primera vez

$$\frac{d\delta_{P1}}{d\xi} = -\frac{l^2}{4EJ_0}\left[\xi-(1-n)\frac{\xi^2}{2}\right]+C_1.$$

Determinamos la constante de integración C_1 por la condición, para $\xi=0$, $\frac{d\delta_{P1}}{d\xi}=0$, dado que el diagrama de δ_{P1} es simétrico. De él obtenemos que $C_1=0$.
Integramos por segunda vez

$$\delta_{P1} = -\frac{l^2}{4EJ_0}\left[\frac{\xi^2}{2}-(1-n)\frac{\xi^3}{6}\right]+D_1.$$

Determinamos la constante de integración D_1 por la condición, para $\xi=1$ $\delta_{P1}=0$, lo que da

$$D_1 = \frac{l^2}{4EJ_0}\left[\frac{1}{2}-(1-n)\frac{1}{6}\right].$$

La ecuación de la línea de influencia de X_1 es

$$\text{l.i. de } X_1 = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}} = -\frac{l}{12(1+n)}[3(1-\xi^2)-(1-n)(1-\xi^3)]. \tag{17.57}$$

LINEA DE INFLUENCIA DE X_2 (fig. 369, *c*)

$$\overline{M}_2 = \frac{z}{l} = \frac{\xi}{2};$$

$$\delta_{22} = 2\int_0^1 \frac{\xi^2}{4}\cdot\frac{l}{2EJ_0}[1-(1-n)\xi]\,d\xi = \frac{1}{EJ_0}\cdot\frac{1+3n}{48}. \tag{17.58}$$

Por la expresión (17.55)

$$\frac{d^2\delta_{P2}}{d\xi^2} = -\frac{\xi l^2}{8EJ_0}[1-(1-n)\xi].$$

Integramos dos veces:

$$\frac{d\delta_{P2}}{d\xi} = -\frac{l^2}{8EJ_0}\left[\frac{\xi^2}{2}-(1-n)\frac{\xi^3}{3}\right]+C_2;$$

$$\delta_{P2} = -\frac{l^2}{8EJ_0}\left[\frac{\xi^3}{6}-(1-n)\frac{\xi^4}{12}\right]+C_2\xi+D_2.$$

Por la condición de simetría inversa, para $\xi=0$, $\delta_{P2}=0$, lo que da $D_2=0$; para $\xi=1$ $\delta_{P2}=0$, lo que da

$$C_2 = \frac{l^2}{8EJ_0}\left[\frac{1}{6}-(1-n)\frac{1}{12}\right].$$

La ecuación de la línea de influencia X_2 es

$$\text{l.i. de } X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}} = -\frac{l\xi}{2(1+3n)}[2(1-\xi^2)-(1-n)(1-\xi^3)]. \tag{17.59}$$

LINEA DE INFLUENCIA DE LA PRESION HORIZONTAL H (fig. 369, *d*)

$$\overline{M}_H = (y-c), \qquad \overline{N}_H = \cos\alpha.$$

La coordenada del centro elástico es

$$c = \int_0^1 \frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k\xi - 1)\frac{l}{2EJ_0} \times$$

$$\times [1-(1-n)\xi]\, d\xi : \int_0^1 \frac{l}{2EJ_0}[1-(1-n)\xi]\, d\xi.$$

Después de la integración, obtenemos que

$$c = \frac{2f}{(m-1)(n+1)}\left\{\frac{\sqrt{m^2-1}}{k} - \right.$$

$$\left. -1-(1-n)\left[\frac{\sqrt{m^2-1}}{k} - \frac{m-1}{k^2} - \frac{1}{2}\right]\right\}. \tag{17.60}$$

El desplazamiento δ_{HH}, se determina teniendo en cuenta las fuerzas longitudinales y utilizando la transformación (17.6):

$$\delta_{HH} = 2(1+\eta)\int_0^{l/2} \overline{M}_H^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} =$$

$$= 2(1+\eta)\int_0^{l/2} (y-c)(y-c+k)\frac{dz}{EJ\cos\alpha}, \tag{17.61}$$

donde

$$\eta = \frac{\displaystyle\int_0^{l/2} \overline{N}_H^2 \frac{dz}{EF\cos\alpha}}{\displaystyle\int_0^{l/2} \overline{M}_H^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha}} = \frac{\displaystyle\int_0^{l/2} \cos^2\alpha \frac{dz}{EF\cos\alpha}}{\displaystyle\int_0^{l/2} (y-c)(y-c+k)\frac{dz}{EJ\cos\alpha}}.$$

Efectuando la sustitución de las magnitudes y el cambio de la variable $z = \xi\frac{l}{2}$, obtenemos que

$$\delta_{HH} = 2(1+\eta)\int_0^1 \left[\frac{f}{m-1}(\operatorname{ch} k\xi - 1) - c\right] \times$$

$$\times \frac{f}{m-1}\operatorname{ch} k\xi\,[1-(1-n)\xi]\frac{l\,d\xi}{2EJ_0}.$$

Después de la integración tendremos que

$$\delta_{HH} = (1+\eta)\frac{lf^2}{EJ_0}\left\{\left[\frac{m-2}{2(m-1)} - \frac{c}{f}\right]\frac{\sqrt{m^2-1}}{k(m-1)} + \frac{1}{2(m-1)^2} - \right.$$
$$-(1-n)\left[\left(\frac{m-2}{2(m-1)} - \frac{c}{f}\right)\frac{\sqrt{m^2-1}}{k(m-1)} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4(m-1)^2} - \frac{1}{k^2}\left(\frac{m-3}{4(m-1)} - \frac{c}{f}\right)\right]\right\}. \qquad (17.62)$$

La ecuación diferencial de los desplazamientos δ_{PH}, por (17.55), será

$$\frac{d^2\delta_{PH}}{d\xi^2} = -\frac{(y-c)\,l^2}{4EJ_0}[1-(1-n)\,\xi] =$$
$$= \frac{fl^2}{4EJ_0}\left[\frac{c}{f} - \frac{\operatorname{ch} k\xi - 1}{m-1}\right][1-(1-n)\,\xi].$$

Integramos por primera vez

$$\frac{d\delta_{PH}}{d\xi} = \frac{fl^2}{4EJ_0}\left[\left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)\xi - \left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)(1-n)\frac{\xi^2}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(m-1)}\cdot\frac{\operatorname{sh} k\xi}{k} + \frac{1-n}{m-1}\left(\frac{\xi \operatorname{sh} k\xi}{k} - \frac{1}{k^2}\operatorname{ch} k\xi\right) + C_H\right].$$

Por la condición de simetría, para $\xi = 0$, $\frac{d\delta_{PH}}{d\xi} = 0$, lo que da $C_H = \frac{1-n}{(m-1)\,k^2}$. Por consiguiente:

$$\frac{d\delta_{PH}}{d\xi} = \frac{fl^2}{4EJ_0}\left[\left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)\xi - \left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)(1-n)\frac{\xi^2}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(m-1)}\cdot\frac{\operatorname{sh} k\xi}{k} + \frac{1-n}{m-1}\left(\frac{\xi \operatorname{sh} k\xi}{k} - \frac{1}{k^2}\operatorname{ch} k\xi + \frac{1}{k^2}\right)\right].$$

Integramos por segunda vez

$$\delta_{PH} = \frac{fl^2}{4EJ_0}\left\{\left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)\frac{\xi^2}{2} - \left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)(1-n)\frac{\xi^3}{6} - \right.$$
$$- \frac{\operatorname{ch} k\xi}{(m-1)\,k^2} + \frac{(1-n)}{m-1}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\xi \operatorname{ch} k\xi}{k} - \frac{1}{k^2}\operatorname{sh} k\xi\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{\operatorname{sh} k\xi}{k^3} + \frac{1}{k^2}\xi\right] + D_H\right\}.$$

Por la condición, para $\xi = 1$ $\delta_{PH} = 0$, obtenemos que

$$D_H = -\left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)\frac{1}{2} + \left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)(1-n)\frac{1}{6} + $$
$$+ \frac{\operatorname{ch} k}{(m-1)\,k^2} - \frac{1-n}{m-1}\left(\frac{1}{k^2}\operatorname{ch} k - \frac{2\operatorname{sh} k}{k^3} + \frac{1}{k^2}\right).$$

Dado que $\operatorname{ch} k = m$, $\operatorname{sh} k = \sqrt{m^2-1}$, $\operatorname{ch} k\xi = 1 + \frac{y}{f}(m-1)$, $\operatorname{sh} k\xi =$
$= \sqrt{\left[1+\frac{y}{f}(m-1)\right]^2 - 1}$,

entonces, después de las transformaciones correspondientes, obtenemos, definitivamente, que

$$\delta_{pH} = -\frac{fl^2}{4EJ_0}\left\{\left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)\frac{1-\xi^2}{2}-\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{y}{f}\right)-\right.$$
$$-(1-n)\left[\left(\frac{c}{f}+\frac{1}{m-1}\right)\frac{1-\xi^3}{6}-\frac{1}{k^2}\left(1-\xi\frac{y}{f}\right)-\right.$$
$$-\frac{2}{k^2(m-1)}\left(1-\xi-\frac{\sqrt{m^2-1}}{k}+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{k}\sqrt{\left[1+\frac{y}{f}(m-1)\right]^2-1}\right)\right]\right\} \qquad (17.63)$$

La ecuación de la línea de influencia de H es

$$\text{l.i. de } H = -\frac{\delta_{pH}}{\delta_{HH}}. \qquad (17.64)$$

Para las l.i. de X_1, X_2 y H se han compuesto las tablas [8].

Las líneas de influencia de los momentos flectores en las secciones del arco, se obtienen por la expresión

$$\text{l.i. de } M = (\text{l.i. de } X_1)\,\overline{M}_1 + (\text{l.i. de } X_2)\,\overline{M}_2 +$$
$$+ (\text{l.i. de } H)\,\overline{M}_H + \text{l.i. de } M^0. \qquad (17.65)$$

Por cuanto las l.i. de X_1, X_2 y M^0 no dependen de la configuración del arco y, las de X_1 y X_2 sólo dependen de la ley de variación de los momentos de inercia de las secciones, es decir, del parámetro n, entonces, la suma de los sumandos que las contienen en (17.65) se puede designar con el símbolo M_V. La línea de influencia de M_V es la línea de influencia del momento flector en la sección de la viga, formada del arco, con la sustitución del empotramiento completo por el deslizante. Para la l.i. de M_V se han compuesto las tablas [9]. Las líneas de influencia de los momentos flectores en las secciones se expresan, por medio de las l.i. de M_V, por la fórmula

$$\text{l.i. de } M = \text{l.i. de } M_V + (\text{l.i. de } H)\,\overline{M}_H. \qquad (17.66)$$

§ 181. CALCULO DE ARCOS BIARTICULADOS BAJO CARGA FIJA. El arco biarticulado es monohiperestático. El sistema básico puede ser formado por dos procedimientos (fig. 370). El sistema básico de viga es más simple que el de arco. Sin embargo, este último por su trabajo se asemeja más al sistema dado. En primera aproximación, él determina, ya, las fuerzas internas en el arco biarticulado. Esta misma ventaja tendrá también el primer sistema básico si se examina con la acción conjunta de la carga dada y la presión horizontal del arco triarticulado, debido a esta carga. En adelante emplearemos el primer sistema básico.

Fig. 370

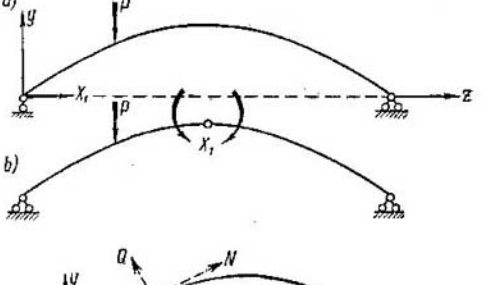
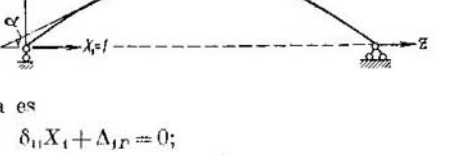


Fig. 371



La ecuación canónica es

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0;$$

$$\delta_{11}=\int_0^l \frac{\overline{M}_1^2\,dz}{EJ\cos\alpha}+\int_0^l \frac{\overline{N}_1^2\,dz}{EF\cos\alpha}+\mu\int_0^l \frac{\overline{Q}_1^2\,dz}{GF\cos\alpha}.$$

Las fuerzas sustituyentes (internas) debidas a $X_1=1$ (fig. 371) son:

$$\overline{M}_1=-1y;\qquad \overline{N}_1=1\cos\alpha;\qquad \overline{Q}_1=-1\operatorname{sen}\alpha.$$

Por consiguiente:

$$\delta_{11}=\int_0^l y^2\frac{dz}{EJ\cos\alpha}+\int_0^l \frac{\cos^2\alpha}{EF}\cdot\frac{dz}{\cos\alpha}+\mu\int_0^l \operatorname{sen}^2\alpha\frac{dz}{GF\cos\alpha}. \quad (17.67)$$

El desplazamiento de carga es

$$\Delta_{1P}=\sum\int(-y)\frac{M_P^0}{EJ}\cdot\frac{dz}{\cos\alpha}+\sum\int\cos\alpha\frac{N_P^0}{EF}\cdot\frac{dz}{\cos\alpha}+$$

$$+\sum\mu\int(-\operatorname{sen}\alpha)\frac{Q_P^0}{GF}\cdot\frac{dz}{\cos\alpha}. \quad (17.68)$$

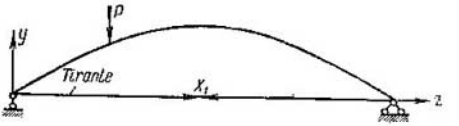
Durante el cálculo del arco biarticulado, la división de la carga en simétrica y de simetría inversa no introduce una gran simplificación. Señalemos, solamente que, para una carga de simetría inversa, la presión horizontal X_1 es igual a cero.

Las expresiones de las fuerzas internas son:

$$M_P=-yX_1+M_P^0;\qquad N_P=\cos\alpha X_1+N_P^0;$$

$$Q_P=-\operatorname{sen}\alpha X_1+Q_P^0. \quad (17.69)$$

Fig. 372



Si el arco tiene viga tirante (fig. 372), seccionándola, podemos obtener el sistema básico. En este caso, sólo varía la fórmula para δ_{11}

$$\delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{dz}{EJ\cos\alpha} + \int_0^l \frac{\cos^2\alpha}{EF} \cdot \frac{dz}{\cos\alpha} + \\ + \mu \int_0^l \operatorname{sen}^2\alpha \frac{dz}{GF\cos\alpha} + \frac{1 \cdot l}{E_{tir} F_{tir}}. \qquad (17.70)$$

§ 182. CALCULO DE ARCOS BIARTICULADOS A LA ACCION DE LA TEMPERATURA Y DISLOCACION DE LOS APOYOS

1. CALCULO A LA ACCION DE LA TEMPERATURA

La ecuación canónica es $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0$.
Para igual incremento de la temperatura en la parte superior e inferior,

$$\Delta_{1t} = -\int_0^l \cos\alpha \cdot \beta t \frac{dz}{\cos\alpha} = -\beta t l.$$

El empuje térmico es

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{\beta t l}{\delta_{11}}. \qquad (17.71)$$

Para el arco con tirante (fig. 372)

$$\Delta_{1t} = -\beta_{arco} t l + \beta_{tir} t l. \qquad (17.72)$$

2. CALCULO A LA DISLOCACION DE LOS APOYOS

Dislocación vertical del apoyo, en un valor a, hacia abajo (fig. 373, *a*). La ecuación canónica es

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0.$$

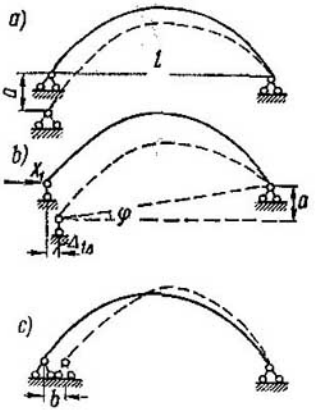
El desplazamiento $\Delta_{1\Delta}$, según (17.21), para pequeños valores de a, es igual a cero. Por consiguiente, también será igual a cero la presión horizontal X_1 del arco.

Para grandes dislocaciones del apoyo, la resolución aproximada, donde $\Delta_{1\Delta}$ se determina por consideraciones geométricas (fig. 373, *b*), será:

$$\Delta_{1\Delta} = l(1 - \cos\varphi) = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}}\right)$$

y δ_{11} conserva su valor anterior.

Fig. 373



Dislocación horizontal del apoyo hacia el interior del arco, en una magnitud b, (fig. 373, *c*).

La ecuación canónica es

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1\Delta}=0;$$

$$\Delta_{1\Delta}=-b.$$

La presión horizontal es

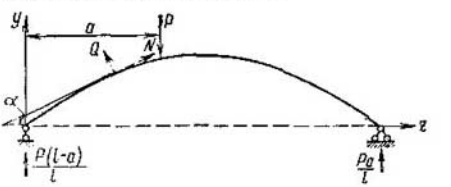
$$X_1=\frac{b}{\delta_{11}}.$$

§ 183. LINEAS DE INFLUENCIA DEL EMPUJE, LOS MOMENTOS FLECTORES Y LAS FUERZAS TRANSVERSALES EN EL ARCO BIARTICULADO

1. LINEA DE INFLUENCIA DEL EMPUJE

Examinemos la acción de la fuerza concentrada P aplicada a una distancia a desde el origen de coordenadas (fig. 374).

Fig. 374



La ecuación canónica es

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0.$$

Las fuerzas internas del arco, debidas al peso P por los sectores, son:

$$0\leqslant z\leqslant a; \qquad a\leqslant z\leqslant l;$$

$$M_P^0=P\frac{l-a}{l}z; \qquad M_P^0=\frac{Pa}{l}(l-z);$$

$$N_P^0=P\frac{l-a}{l}\operatorname{sen}\alpha; \qquad N_P^0=-\frac{Pa}{l}\operatorname{sen}\alpha;$$

$$Q_P^0=P\frac{l-a}{l}\cos\alpha; \qquad Q_P^0=-\frac{Pa}{l}\cos\alpha.$$

El término independiente es

$$\Delta_{1P} = \int_0^a -y\frac{P(l-a)}{l}z\frac{dz}{EJ\cos\alpha} + \int_a^l -y\frac{Pa}{l}(l-z)\frac{dz}{EJ\cos\alpha} +$$

$$+ \int_0^a \cos\alpha\frac{P(l-a)}{l}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{EF}\cdot\frac{dz}{\cos\alpha} +$$

$$+ \int_a^l \cos\alpha\left(-\frac{Pa}{l}\right)\frac{\operatorname{sen}\alpha}{EF}\cdot\frac{dz}{\cos\alpha} +$$

$$+ \mu\int_0^a -\operatorname{sen}\alpha\frac{P(l-a)}{l}\cdot\frac{\cos\alpha}{GF}\cdot\frac{dz}{\cos\alpha} +$$

$$+ \mu\int_a^l -\operatorname{sen}\alpha\left(-\frac{Pa}{l}\right)\frac{\cos\alpha}{GF}\cdot\frac{dz}{\cos\alpha} = P\varphi(a).$$

El valor del empuje es $X_1 = -\dfrac{P\varphi(a)}{\delta_{11}}$.

Obtenemos la ecuación de la línea de influencia dividiendo X_1 por P y sustituyendo a por la coordenada variable z, es decir,

$$\text{l.i. de } X_1 = -\frac{\varphi(z)}{\delta_{11}}. \tag{17.73}$$

2. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS FUERZAS SUSTITUYENTES (INTERNAS)

De acuerdo con (14.77) las líneas de influencia de las fuerzas internas se determinan por las expresiones (fig. 375):

$$\left.\begin{aligned}
\text{l.i. de } M_k &= -(\text{l.i. de } X_1)\,y_k + \text{l.i. de } M_k^0;\\
\text{l.i. de } N_k &= -(\text{l.i. de } X_1)\cos\alpha_k + \text{l.i. de } N_k^0;\\
\text{l.i. de } Q_k &= -(\text{l.i. de } X_1)\operatorname{sen}\alpha_k + \text{l.i. de } Q_k^0;\\
\text{l.i. de } M_{k_1}^{\text{nucl}} &= -(\text{l.i. de } X_1)\,y_{k_1} + \text{l.i. de } M_{k_1}^0;\\
\text{l.i. de } M_{k_2}^{\text{nucl}} &= -(\text{l.i. de } X_1)\,y_{k_2} + \text{l.i. de } M_{k_2}^0;
\end{aligned}\right\} \tag{17.74}$$

Todas ellas se obtienen de la suma de la línea de influencia del empuje, multiplicada por el correspondiente coeficiente, y de la línea de influencia de la magnitud determinada en el sistema básico. Las líneas de influencia de las magnitudes M_k^0, N_k^0, Q_k^0 y M_{k1}^0 están representadas en la fig. 375.

§ 184. METODO GRAFICO-ANALITICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DEL EMPUJE EN EL ARCO BIARTICULADO. El desplazamiento δ_{p1}, que determina a la línea de influencia de X_1 por el método cinemático, es el momento flector debido a la carga convencional en la viga convencional (fig. 376, *b*). Para una nueva dirección del eje v y la fuerza compri-

Fig. 375

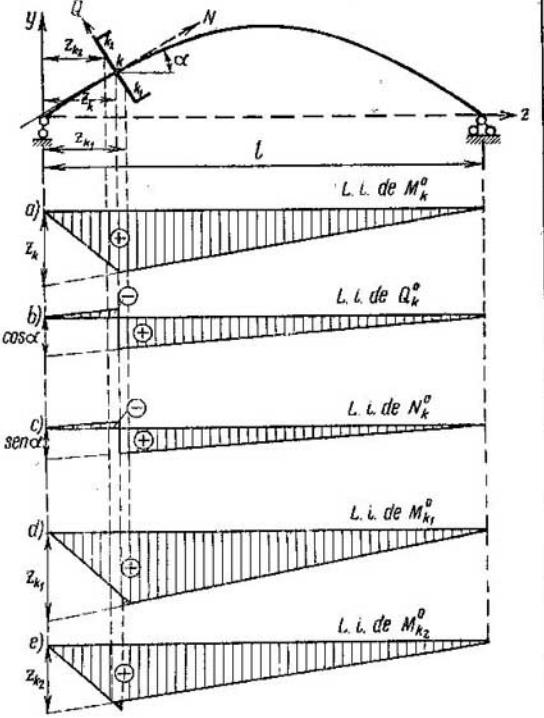
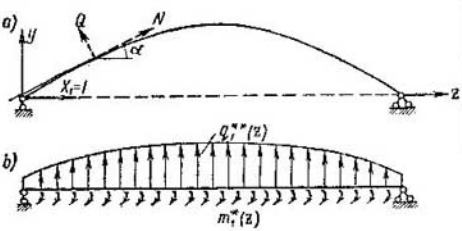


Fig. 376



mente positiva, la intensidad de la carga convencional, por (11.82) y (11.86), es:

$$q_1^* = -\frac{\overline{M}_1}{EJ\cos\alpha} + \frac{d}{dz}\left(\frac{\overline{N}_1}{EF}\operatorname{tg}\alpha\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu\frac{\overline{Q}_1}{GF}\right); \qquad (17.75)$$

$$q_1^{**} = -\frac{\overline{M}_1}{EJ\cos\alpha}; \quad m_1^* = \frac{\overline{N}_1}{EF}\operatorname{tg}\alpha + \mu\frac{Q_1}{GF}. \qquad (17.76)$$

La ecuación deferencial de los desplazamientos δ_{p1} es

$$\frac{d^2\delta_{p1}}{dz^2} = q_1^* = q_1^{**}(z) + \frac{dm^*(z)}{dz}. \qquad (17.77)$$

Las condiciones límites son: para $z = 0$ $\delta_{p1} = 0$, para $z = l$ $\delta_{p1} = 0$.

Los pesos elásticos concentrados intermedios, al sustituir el arco por una viga quebrada, con los valores medios J y F por sus partes, sin tomar en cuenta la curvatura del arco, se determinan, por (11.80), para $m = 1$.

$$W_{km} = W_{km}^{(M)} + W_{km}^{(N)} + W_{km}^{(Q)} =$$

$$= -\left[\frac{c_k}{6\cos\alpha_k EJ_k}(\overline{M}_{(k-1)\,1} + 2\overline{M}_{k1}) + \frac{c_{k+1}}{6\cos\alpha_{k+1}EJ_{k+1}}(2\overline{M}_{k1} + \right.$$

$$\left. + \overline{M}_{(k+1)\,1})\right] + \left[\frac{\overline{N}_{k1}^{\text{der}} + \overline{N}_{(k+1)\,1}^{\text{izq}}}{2EF_{k+1}}\operatorname{tg}\alpha_{k+1} - \right.$$

$$- \frac{\overline{N}_{(k-1)\,1}^{\text{der}} + \overline{N}_{k1}^{\text{izq}}}{2EF_k}\operatorname{tg}\alpha_k\Big] + \Big[\mu_{k+1}\frac{\overline{Q}_{k1}^{\text{der}} + \overline{Q}_{(k+1)\,1}^{\text{izq}}}{2GF_{k+1}} - \Big.$$

$$\left. - \mu_k\frac{\overline{Q}_{(k-1)\,1}^{\text{der}} + \overline{Q}_{k1}^{\text{izq}}}{2GF_k}\right]. \qquad (17.78)$$

El extremo izquierdo (en cero) y el extremo derecho (último) se obtienen, fácilmente, de (17.78) o por (17.48), variando el signo ante los paréntesis que contienen a las fuerzas longitudinales originadas, aquí, por otro sistema de coordenadas.

El desplazamiento propio δ_{11} se calcula por la fórmula (17.49), para $m = 1$.

Para calcular $W_{km}^{(M)}$ se puede emplear la fórmula (17.50), igualmente para $m = 1$.

§ 185. CALCULO DE ARCOS BIARTICULADOS CON EL EJE A LO LARGO DE LA CURVA DE PRESION EN EL ARCO TRIARTICULADO. Para generalizar los razonamientos consideraremos que el arco tiene tirante.

Para el arco sin tirante, debemos hacer en los resultados obtenidos $F_{\text{tir}} = \infty$.

A la carga aplicada al sistema básico le agregamos la presión hori-

zontal H debida a la carga dada en el arco triarticulado (fig. 377). En este caso, $M_P^0 = 0$, $Q_P^0 = 0$ y $N_P^0 = \frac{N}{\cos\alpha}$.

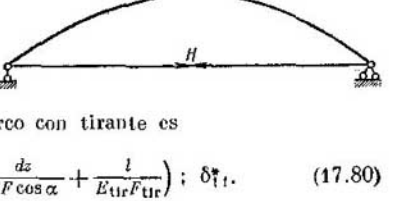
La ecuación canónica es

$$\delta_{11}^* X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

El desplazamiento $\delta_{11}^* = \delta_{11} + \frac{1 \cdot l}{D_{tir} F_{tir}}$, donde δ_{11} es el desplazamiento análogo en el arco sin tirante. El término independiente es

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \overline{N}_1 \frac{N_P\, dz}{EF\cos\alpha} + \frac{Hl}{E_{tir}F_{tir}} = H \int_0^l \frac{dz}{EF\cos\alpha} + \frac{Hl}{E_{tir}F_{tir}}. \quad (17.79)$$

Fig. 377



La incógnita básica para el arco con tirante es

$$X_1 = -H \left(\int_0^l \frac{dz}{EF\cos\alpha} + \frac{l}{E_{tir}F_{tir}} \right) : \delta_{11}^*. \quad (17.80)$$

La incógnita básica para el arco sin tirante es

$$X_1 = -H \int_0^l \frac{dz}{EF\cos\alpha} : \delta_{11}. \quad (17.81)$$

El cálculo de arcos biarticulados con la configuración catenoidal y otras formas de curvas funiculares, bajo carga permanente y las ecuaciones de las líneas de influencia de la presión horizontal X_1, para diferentes leyes de variación de los momentos de inercia y las áreas de las secciones, se exponen en el trabajo del autor [10].

§ 186. CALCULO DE CORONAS CIRCULARES. La barra curva de curvatura constante posee una propiedad particular, con la cual, los seis primeros términos de la fórmula de los desplazamientos de carga (11.37) pueden ser reducidos a tres.

Hallemos, al principio, las dependencias diferenciales entre las fuerzas internas y las cargas, examinando el equilibrio de un elemento infinitesimal de una barra curva. Para generalizar, examinemos el elemento bajo la acción de una carga repartida sobre la superficie externa (fig. 378). De las condiciones de equilibrio $\Sigma M_0 = 0$; $\Sigma M_k = 0$ y $\Sigma U = 0$, obtenemos la dependencia diferencial

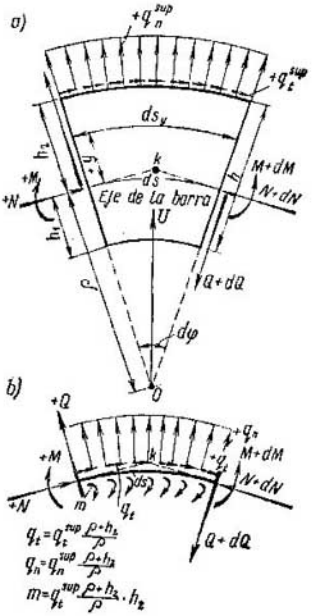
con una precisión de hasta los valores infinitesimales de primer orden, en la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN}{ds}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dM}{ds}=q_t^{\sup}\frac{(\rho+h_2)^2}{\rho^2}=\frac{q_t\rho+m}{\rho};\\ &\frac{dM}{ds}=Q+q_t^{\sup}\frac{\rho+h_2}{\rho}h_2=Q+m;\quad \frac{dQ}{ds}-\frac{N}{\rho}=q_n^{\sup}\frac{\rho+h_2}{\rho}=q_n,\\ &\text{donde } m=q_t^{\sup}\frac{\rho+h_2}{\rho}h_2;\quad q_t=q_t^{\sup}\frac{\rho+h_2}{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad (17,82)$$

De la primera expresión de (17.82), siendo $\rho=r$, obtenemos que

$$dM=-dN\cdot r+(q_t r+m)\,ds.$$

Fig. 378



Integrando, obtenemos que $M=$

$$=-Nr+\int_0^s (q_t r+m)\,ds+D.$$

Expresamos la constante de integración D por medio de las condiciones iniciales, haciendo para $s=0$, $M=M_0$ y $N=N_0$. Entonces, $D=M_0+N_0 r$.

Por consiguiente,

$$M=-Nr+C, \qquad (17.83)$$

donde $C=\int_0^s (q_t r+m)\,ds+D$, y $D=$ $=M_0+N_0 r$.

Debido a la fuerza unitaria $P_k=1$

$$\overline{M}_k=-\overline{N}_k r+\overline{D}_k. \quad (17.84)$$

Colocando a (17.83) en el cuarto y sexto sumandos de la fórmula de los desplazamientos, obtenemos, que:

$$\Delta_{kP}=\sum\int \overline{M}_k\frac{M_P}{EJ}\,ds+\sum\mu'\int \overline{Q}_k\frac{Q_P}{GF}\,ds+$$

$$+\sum\overline{D}_k\int\frac{N_P}{EFr}\,ds+\sum\overline{D}_k\int\frac{M_P}{EFr^2}\,ds.$$

Ahora, en el último sumando colocamos $M_P = -N_P r + C_P$ debido a la carga y obtenemos definitivamente la fórmula de tres términos de los desplazamientos

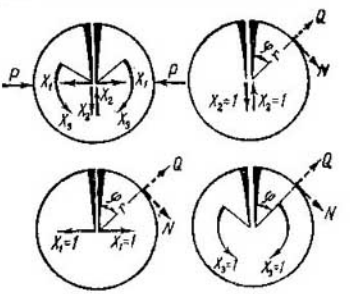
$$\Delta_{kP} = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_P}{EJ} ds + \sum \mu' \int \overline{Q}_k \frac{Q_P}{GF} ds + \\ + \sum \overline{D}_k \int \frac{C_P}{EFr^2} ds. \qquad (17.85)$$

Correspondientemente, para los desplazamientos unitarios, cuando $\overline{C}_m = \overline{D}_m$, tendremos que

$$\delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \frac{\overline{M}_m}{EJ} ds + \sum \mu' \int \overline{Q}_k \frac{\overline{Q}_m}{GF} ds + \\ + \sum \frac{\overline{D}_k \overline{D}_m}{r^2} \int \frac{ds}{EF}. \qquad (17.86)$$

En el curso del cálculo de las coronas, el sistema básico se forma seccionando el anillo, y las incógnitas básicas se trasladan al centro

Fig. 379



elástico. Para las coronas circulares, cuya sección circular es constante, y nosotros examinaremos precisamente tales coronas, el centro elástico coincide con el geométrico (fig. 379).

Las ecuaciones canónicas son:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.87)$$

Los estados unitarios se exponen en la fig. 379. De ellos hallamos que:

$$\overline{M}_1 = -r\cos\varphi; \quad \overline{M}_2 = r\,\mathrm{sen}\,\varphi; \quad \overline{M}_3 = 1;$$
$$\overline{N}_1 = \cos\varphi; \quad \overline{N}_2 = -\mathrm{sen}\,\varphi; \quad \overline{N}_3 = 0;$$
$$\overline{Q}_1 = \mathrm{sen}\,\varphi; \quad \overline{Q}_2 = \cos\varphi; \quad \overline{Q}_3 = 0;$$
$$\overline{D}_1 = 0; \quad \overline{D}_2 = 0; \quad \overline{D}_3 = 1.$$

Por la fórmula (17.86) obtenemos;

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta_{11}}{2} &= \int_0^{\pi} \frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot r\, d\varphi}{EJ'} + \mu' \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \cdot r\, d\varphi}{GF} = \frac{\pi r^3}{2EJ'} + \frac{\mu' \pi r}{2GF}\,; \\
\frac{\delta_{22}}{2} &= \int_0^{\pi} \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot r\, d\varphi}{EJ'} + \mu' \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi \cdot r\, d\varphi}{GF} = \frac{\pi r^3}{2EJ'} + \frac{\mu' \pi r}{2GF}\,; \\
\frac{\delta_{33}}{2} &= \int_0^{\pi} \frac{1^2 \cdot r\, d\varphi}{EJ'} + \frac{1}{r^2} \int_0^{\pi} \frac{r\, d\varphi}{EF} = \frac{\pi r}{EJ'} + \frac{\pi}{rEF}.
\end{aligned}\right\} \quad (17.88)$$

Los términos de carga se calculan por la fórmula (17.85)

CAPITULO XVIII * CALCULO DE SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS POR EL METODO DE DESPLAZAMIENTOS

§ 187. GRADO DE INDETERMINACION CINEMATICA. Por grado de indeterminación cinemática se entiende el número de incógnitas básicas del método de desplazamientos, o sea, los ángulos de giro y los desplazamientos lineales de los nudos rígidos del sistema.

Este número depende de las admisiones que se acepten en el método:

1) los extremos de las barras que convergen a un nudo rígido, es decir, ligados entre sí con soldadura, giran en un mismo ángulo;

2) no se tiene en cuenta la influencia de N y Q sobre el desplazamiento de los nudos;

3) durante la deformación de las barras rectas por flección las distancias entre los nudos no varían;

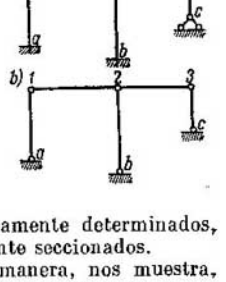
4) debido a la pequeñez de los ángulos de giro, éstos se toman iguales a sus tangentes.

El número de desplazamientos angulares de los nudos se determina por la cantidad de nudos rígidos que pueden girar en forma independiente. En este caso, se considera rígido a cualquier nudo, en el cual, no menos de dos barras están unidas entre sí con soldadura.

Hablando en general, el número de desplazamientos progresivos independientes de los nudos no es igual a la cantidad de nudos que pueden desplazarse progresivamente, dado que, sobre la base de la segunda y tercera admisión no todos los desplazamientos progresivos pueden ser independientes. Por ejemplo, los desplazamientos progresivos de los nudos *1*, *2* y *3*, del pórtico de la fig. 380, son dependientes y se desplazarán horizontalmente a una misma magnitud.

Por cuanto, durante la deformación, las distancias entre los nudos unidos por barras no varían, entonces, el número de desplazamientos progresivos independientes de los nudos del sistema dado, compuesto de barras rectas, es igual al número de desplazamientos independientes de los nudos del sistema transformado, obtenido del dado *introduciendo articulaciones en todos los nudos, incluso, en los de apoyo* (fig. 380, *b*), considerando a todas las barras del sistema transformado como absolutamente rígidas.

Fig. 380



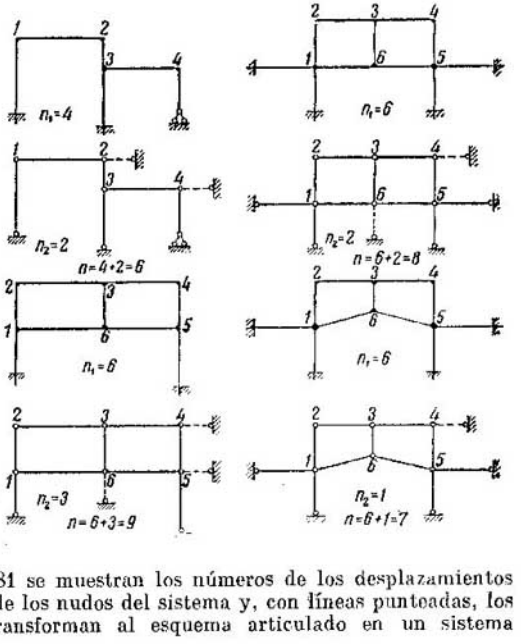
En este caso, todos los voladizos estáticamente determinados, si existen en el sistema deberán ser previamente seccionados.

El esquema articulado obtenido de tal manera, nos muestra, por ejemplo, que el nudo *1* no puede desplazarse verticalmente, ya que se lo impide la barra *a*-1, el desplazamiento vertical de cuyo extremo *1*, se desprecia, al girar la barra alrededor del punto *a*, dado que, para giros pequeños, el desplazamiento del extremo se puede considerar horizontal. El desplazamiento horizontal del nudo *1* depende del desplazamiento del nudo *2*. Si el nudo *2* no se desplaza horizontalmente, entonces, el *1*, también permanecerá inmóvil. A su vez, el nudo *2* no puede desplazarse verticalmente, dado que se lo impide la barra *b*-2 y su desplazamiento horizontal, depende del desplazamiento del nudo *3*. El nudo 3 no puede desplazarse verticalmente, porque se lo impide la barra *c*-3, pero, horizontalmente, sí. Por consiguiente, el sistema dado puede tener los desplazamientos horizontales de los nudos *1*, *2* y *3*. Por cuanto los desplazamientos son pequeños y las distancias entre los nudos no varían, los desplazamientos horizontales de los nudos *1*, *2* y *3* serán iguales entre sí y, por consiguiente, habrá un único desplazamiento independiente progresivo.

En calidad de desplazamientos progresivos incógnitos, se toman los *desplazamientos progresivos independientes*, cuyo número es igual a la cantidad de vínculos complementarios que transforman el esquema articulado en un sistema invariante.

El número general de desplazamientos angulares e independientes progresivos es igual al número de incógnitas básicas del método de desplazamientos o al grado de indeterminación cinemática.

Fig. 381



En la fig. 381 se muestran los números de los desplazamientos independientes de los nudos del sistema y, con líneas puntoadas, los vínculos que transforman al esquema articulado en un sistema invariante.

§ 188. ECUACIONES CANONICAS PARA EL CALCULO BAJO CARGA FIJA. Aquí y en adelante, examinaremos los sistemas superditados al principio de superposición. Desarrollamos la ecuación (13.2) empleando el principio de independencia de acción de las fuerzas:

$$R_{h\,(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ P)} = R_{hZ_1} + R_{hZ_2} + \ldots + R_{hZ_n} + R_{hP} = 0.$$

Haciendo a continuación $R_{hZ_m} = r_{hm}Z_m$, obtenemos la k-ésima ecuación canónica del método de desplazamientos

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2} + Z_2 + \ldots + r_{hm}Z_m + \ldots + r_{kn}Z_n + R_{kP} = 0 \quad (18.1)$$

para $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

donde r_{hm} es la reacción del vínculo k, debida al desplazamiento por la dirección del vínculo m, que corresponde a la unidad de desplazamiento (*reacción unitaria*);

R_{kP} la reacción del vínculo k debida a la carga (*reacción de carga*).

Las reacciones unitarias r_{kk} se llaman reacciones propias y las r_{km} (para $k \neq m$), secundarias. Las reacciones unitarias se supeditan al teorema de la reciprocidad: $r_{km} = r_{km}$ (véase 11.35).

La dirección positiva de las reacciones de los vínculos de fuerza y de momento coinciden con la dirección de los desplazamientos positivos del vínculo dado.

Suponiendo, en la ecuación (18.1), sucesivamente, a $k = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos tantas ecuaciones como incógnitas $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ hay:

$$\left.\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \ldots + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \ldots + r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \ldots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (18.2)$$

El sistema de ecuaciones (18.2) se llama sistema de ecuaciones canónicas del método de desplazamientos.

Lo escribimos en la forma matriz:

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{R}_P = 0. \qquad (18.3)$$

donde:

1) $$\boldsymbol{R} = \| r_{km} \| = \begin{Vmatrix} r_{11}r_{12} \ldots r_{1n} \\ r_{21}r_{22} \ldots r_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}r_{n2} \ldots r_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (18.4)$$

es la matriz de los coeficientes de las ecuaciones canónicas;

2) $$\boldsymbol{Z} = |\{Z_1 Z_2 \ldots Z_n\}| \qquad (18.5)$$

es la matriz de columna (vector) de las incógnitas;

3) $$\boldsymbol{R}_P = |\{R_{1P} R_{2P} \ldots R_{nP}\}| \qquad (18.6)$$

es la matriz de columna (vector) de las reacciones de carga.

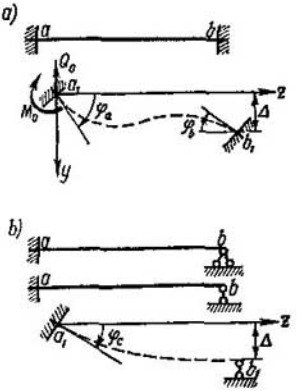
Como veremos más adelante, las matrices $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R}_P$ en el método de desplazamientos se componen de una manera muy simple.

§ 189. DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES EN LOS ELEMENTOS DEL SISTEMA BASICO CON EL NUMERO COMPLETO DE VINCULOS. Los elementos de un sistema básico con el número completo de vínculos son vigas con los dos extremos empotrados y vigas con un extremo empotrado y el otro sobre un apoyo articulado.

1. VIGAS CON LOS EXTREMOS EMPOTRADOS

Supongamos que el extremo izquierdo de la viga giró, en sentido de las agujas del reloj, en un ángulo φ_a, el derecho, en φ_b y tuvo lugar un desplazamiento relativo de los extremos de la viga en la magnitud Δ, para el cual, la cuerda de la barra deformada giró tam-

Fig. 382



bién en sentido de las agujas del reloj (fig. 382, *a*). Si el origen de coordenadas está en el punto a_1, entonces, los parámetros iniciales serán: $y_0 = 0$, $y'_0 = \varphi_a$ y M_0 y Q_0 son desconocidos. La ecuación del eje de una barra curva es:

$$y = \varphi_a z - \frac{M_0 z^2}{EJ2!} - \frac{Q_0 z^3}{EJ3!}$$

y

$$y' = \varphi_a - \frac{M_0 z}{EJ} - \frac{Q_0 z^2}{EJ2!},$$

las condiciones en el extremo derecho, o sea, para $z = l$, $y_l = \Delta$ e $y'_l = \varphi_b$.

Por eso

$$y_l = \varphi_a l - \frac{M_0 l^2}{EJ2!} - \frac{Q_0 l^3}{EJ3!} = \Delta;$$

$$y'_l = \varphi_a - \frac{M_0 l}{EJ} - \frac{Q_0 l^2}{EJ2!} = \varphi_b,$$

de donde obtenemos que

$$M_0 = \frac{2EJ}{l}\left(2\varphi_a + \varphi_b - \frac{3\Delta}{l}\right); \qquad (18.7)$$

$$Q_0 = -\frac{6EJ}{l}\left(\varphi_a + \varphi_b - \frac{2\Delta}{l}\right). \qquad (18.8)$$

2. VIGA CON UN EXTREMO EMPOTRADO Y EL OTRO SOBRE UN APOYO ARTICULADO (fig. 382, *b*)

Escribimos la ecuación del eje de la barra curva en forma análoga

$$y = \varphi_a z - \frac{M_0 z^2}{2EJ} - \frac{Q_0 z^3}{EJ3!};$$

$$y'' = -\frac{M_0}{EJ} - \frac{Q_0 z}{EJ}.$$

Las condiciones en el extremo derecho, o sea, para $z = l$, $y_l = \Delta$ e $y'_l = 0$ son:

$$\varphi_a l - \frac{M_0 l^2}{EJ2!} - \frac{Q_0 l^3}{EJ3!} = \Delta; \qquad -\frac{M_0}{EJ} - \frac{Q_0 l}{EJ} = 0,$$

de donde obtenemos que

$$M_0 = \frac{3EJ}{l}\varphi_a - \frac{3EJ}{l^2}\Delta,$$

$$Q_0 = -\frac{3EJ}{l^2}\varphi_a + \frac{3EJ}{l^3}\Delta. \qquad (18.9)$$

Por las expresiones halladas de los parámetros iniciales M_0 y Q_0 se pueden construir los diagramas de los momentos flectores debidos a cada desplazamiento por separado, que le corresponde a la unidad de desplazamiento. Tales diagramas se muestran en la tabla 10.

Los momentos flectores bajo la acción de la carga, se determinan en forma análoga (véase la tabla 11).

Los datos expuestos en las tablas 10 y 11 pueden ser utilizados para construir los diagramas unitarios y de carga de los momentos flectores en el sistema básico.

Tabla 10

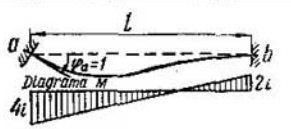
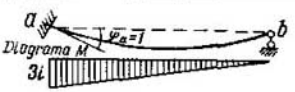
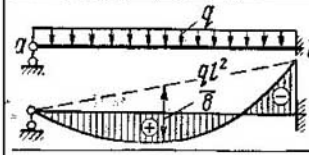
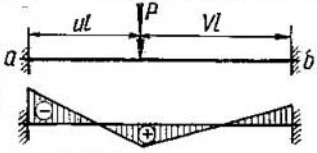
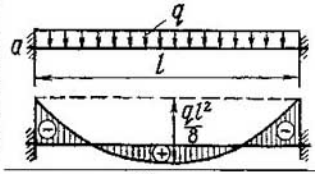
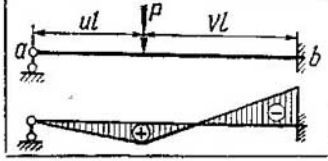
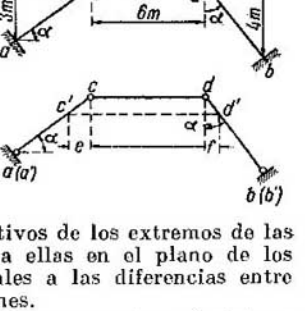
Tipo de desplazamiento	Diagramas de los momentos flectores $i = EJ : l$
Giro del extremo izquierdo	
Desplazamiento relativo de avance de los extremos	
Giro del extremo izquierdo	
Desplazamiento relativo de avance de los extremos	

Tabla 11

Tipo de carga	Momentos flectores		Fuerzas transversales	
	M_{ab}	M_{ba}	Q_{ab}	Q_{ba}
	$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
	$-Pluv^2$	$-Plu^2v$	$Pv^2(1+2u)$	$-Pu^2(3-2u)$
	0	$-\frac{ql^2}{8}$	$\frac{3}{8}ql$	$-\frac{5}{8}ql$
	0	$-\frac{P}{2}lu(1-u^2)$	$\frac{P}{2}v^2(2+u)$	$-\frac{P}{2}u(3-u^2)$

§ 190. DETERMINACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS RELATIVOS DE LOS EXTREMOS DE LAS BARRAS, DURANTE LOS DESPLAZAMIENTOS PROGRESIVOS DE LOS NUDOS. Para la construcción de los diagramas unitarios debidos a los desplazamientos progresivos de los nudos, es indispensable conocer los desplazamientos relativos de los extremos de cada barra por la dirección perpendicular a su eje. Estos desplazamientos pueden ser determinados por el plano de los puntos representativos para el esquema articulado del pórtico con vínculos progresivos superpuestos, aparte de aquél, por la dirección del cual se fija el desplazamiento.

Fig. 383



Los desplazamientos progresivos relativos de los extremos de las barras por la dirección perpendicular a ellas en el plano de los puntos representativos, son proporcionales a las diferencias entre las longitudes de las barras y sus imágenes.

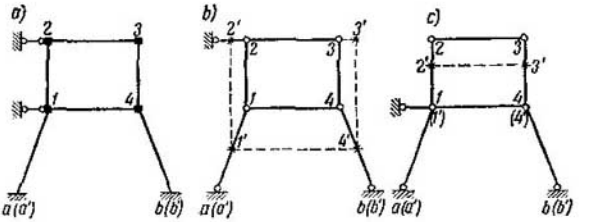
En la fig. 383, en calidad de ejemplo, se muestran el sistema básico y el plano de los puntos representativos para un esquema articulado. Este plano se ha construido así: las imágenes de los puntos fijos a y b se encuentran en estos puntos, la imagen del punto c la fijamos, arbitrariamente, sobre la recta ac (punto c'). Desde el punto c' trazamos una recta paralela a cd y, desde el b, una paralela a bd. En la intersección de estas rectas está la imagen d' del punto d.

Si se toma como unidad el desplazamiento del punto c, o sea, que $ac = a'c' = cc' = 1$, entonces, los desplazamientos relativos de los extremos de las barras restantes son los siguientes:

$$\delta_{bd} = bd - b'd' = \frac{3}{4}, \quad \delta_{cd} = cd - c'd' = -\left(1\cos\alpha + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\alpha\right) = -\frac{5}{4}.$$

En la fig. 384 se han construido los puntos representativos para el caso de exclusión sucesiva de los vínculos de fuerza. Al excluir el primero de ellos (fig. 384, *b*), fijamos arbitrariamente la imagen del punto *1* sobre la recta $a - 1$. Adoptamos como unidad la longitud del segmento *1-1'*. Así como en la construcción anterior, se obtiene la imagen *4'* del punto 4. El punto 2 puede desplazarse sólo en dirección vertical, ya que la barra horizontal de apoyo le impide todo movimiento horizontal. Por consiguiente, su imagen se halla

Fig. 384



sobre la recta horizontal que pasa por este punto. Además, la imagen de la barra *1-2* deberá pasar por el punto representativo *1'* conocido y ser paralela a la propia barra. De este modo se encuentra la imagen *2'* del punto 2. Después de esto, en la intersección de las rectas *2'-3'* y *4'-3'*, paralelas a las barras *2-3* y *4-3*, se halla la imagen *3'* del punto *3*. Al excluir el segundo vínculo de fuerza (fig. 384, *c*), los puntos representativos se hallan con facilidad y su construcción no requiere explicaciones. Los desplazamientos relativos progresivos de los extremos de las barras se determinan por la diferencia entre las longitudes de las mismas y sus imágenes. Por el plano de los puntos representativos (fig. 384, *c*) obtenemos un importante corolario: *en el caso de montantes paralelos, los desplazamientos relativos de los extremos de todos los montantes son idénticos y, los de los extremos de las vigas horizontales iguales a cero.*

§ 191. COEFICIENTES Y TERMINOS INDEPENDIENTES DE LAS ECUACIONES CANONICAS. Examinemos los desplazamientos del sistema básico por la dirección de los vínculos k y m (fig. 385, *a*, *b*) y los diagramas de momentos flectores M_k y M_m debidos a estos vínculos. Componemos la expresión del trabajo de las fuerzas del estado m en los desplazamientos del k.

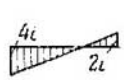
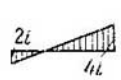
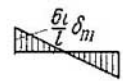
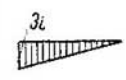
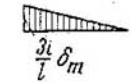
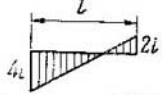
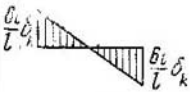
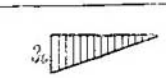
$$R_{kZm}Z_k = \sum \int M_m \frac{M_k}{EJ}\, ds.$$

Dividimos esta expresión por el producto Z_kZ_m

$$r_{km} = \sum \int \frac{M_m}{Z_m} \cdot \frac{M_k}{Z_k} \cdot \frac{ds}{EJ} = \sum \int \overline{M}_m \frac{\overline{M}_k}{EJ}\, ds = (\overline{M}_m) \cdot (\overline{M}_k), \quad (18.10)$$

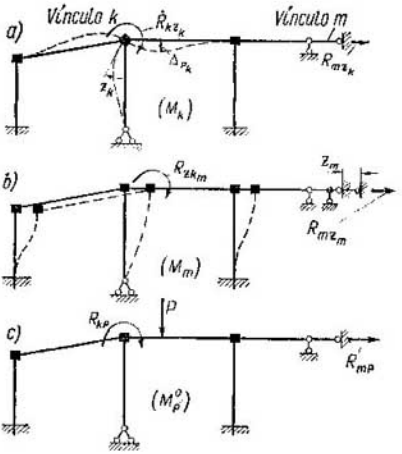
donde $\overline{M}_k$ y $\overline{M}_m$ son los momentos flectores que le corresponde a la unidad de los desplazamientos z_k y z_m.

Por consiguiente, los coeficientes r_{km} de las ecuaciones canónicas pueden ser determinados por la fórmula (18.10) análoga a la fórmula general de los desplazamientos. El cálculo de las integrales puede ser cumplido con la multiplicación de los diagramas unitarios. Por cuanto los diagramas unitarios en el sistema básico son estandart, el resultado de la multiplicación se puede colocar en la tabla 12.

Diagramas de los momentos flectores	Diagramas de los momentos flectores $\overline{M}_m$				
					
	$4i$	$2i$	$-\frac{6i}{l}\delta_m$	—	—
	$2i$	$4i$	$-\frac{6i}{l}\delta_m$	—	—
	$-\frac{6i}{l}\delta_k$	$-\frac{6i}{l}\delta_k$	$\frac{12i}{l^2}\delta_k\delta_m$	—	—
	—	—	—	$3i$	$-\frac{3i}{l}\delta_m$
	—	—	—	$-\frac{3i}{l}\delta_k$	$\frac{3i}{l^2}\delta_k\delta_m$

Observación: δ_k y δ_m son los desplazamientos relativos de los extremos de la barra debidos a los desplazamientos de traslación $z_k=1$ y $z_m=1$. Estos son positivos cuando la cuerda de la barra gira en sentido de las agujas del reloj. En el caso de desplazamientos unitarios horizontales, δ_k y δ_m en los montantes verticales son iguales a la unidad.

Fig. 385



Las reacciones propias r_{kk} son siempre positivas y, las secundarias r_{km} pueden ser de cualquier signo, lo que significa que también pueden ser iguales a cero.

Para la determinación de las reacciones de carga examinemos el estado de carga (fig. 385, *c*). En los vínculos k y m, debido a la carga, surgen las reacciones R_{kP} y R_{mP}. Hallemos el trabajo posible de las fuerzas del estado de carga en los desplazamientos del estado k, o sea, los originados por los desplazamientos Z_k.

$$R_{kP}Z_k + \sum P\Delta_{Pk} = \sum \int M_P^0 \frac{M_k}{EJ}\, ds. \qquad (18.11)$$

Sobre la base del teorema de la reciprocidad de los trabajos, tenemos que

$$R_{kP}Z_k + \sum P\Delta_{Pk} = 0.$$

Comparando las expresiones obtenidas, tenemos que

$$\sum \int M_P^0 \frac{M_k}{EJ}\, ds = (\boldsymbol{M}_P^0)\cdot(\boldsymbol{M}_k) = 0.$$

De esta expresión se desprende que la reacción debida a la carga R_{kP} no puede ser hallada multiplicando los diagramas de carga M_P^0 y unitario $\overline{M}_k$ del sistema básico del método de desplazamientos, como esto se hizo en el cálculo de Δ_{kP} en el método de fuerzas, dado que, notoriamente, este producto siempre es igual a cero. Ahora, de (18.11), obtenemos

$$R_{kP} = -\sum P\,\frac{\Delta_{Pk}}{Z_k} = -\sum P\delta_{Pk}. \qquad (18.12)$$

Por consiguiente, la reacción de carga R_{kP} se expresa por medio del trabajo de la carga en los desplazamientos debidos al desplazamiento unitario del vínculo k en el sistema básico. Este trabajo es igual al de las presiones nodales, de fuerza y momento, debidas a la carga sobre los apoyos, por los extremos de la barra en el sistema básico, en los mismos desplazamientos. Al determinar las reacciones de fuerza y carga, el trabajo de las presiones nodales se puede representar por medio de sus momentos con respecto a los puntos representativos de los nudos a los que se aplicaron las presiones nodales. Por ejemplo, al determinar la reacción de fuerza y carga R_{3P} (véase la fig. 383), se puede escribir

$$R_{3P} = -\left(\frac{P}{2}e - \frac{P}{2}f\right).$$

El trabajo de la carga $\Sigma P\delta_{Pk}$ y, por consiguiente, el de la reacción R_{kP}, puede ser expresado por medio del trabajo de las fuerzas internas. Es evidente que el trabajo de la carga en los desplazamientos debidos a $Z_k = 1$, no depende de a cual sistema ella está aplicada, al básico o al obtenido de éste mediante la eliminación de vínculos. Hallemos tal sistema obtenido del básico por medio de la eliminación de vínculos, que el trabajo de las fuerzas externas en los desplazamientos debidos a $Z_k = 1$, no contenga reacciones de carga.

Por cuanto el estado k contiene sólo un desplazamiento por la dirección de los vínculos introducidos en el sistema básico y, precisamente, por la dirección del vínculo k, entonces, aparte de la carga, sólo puede realizar trabajo la reacción de este vínculo. Si al mismo lo excluimos del sistema básico, entonces, su reacción y su trabajo serán iguales a cero. Esto significa que el *sistema buscado no deberá contener el vínculo k.*

Por cuanto las reacciones restantes de los vínculos introducidos en el sistema básico no efectúan trabajo en los desplazamientos del estado k, entonces, estos vínculos también pueden ser excluidos del sistema buscado. Si del sistema básico eliminamos cualquier vínculo superfluo interno y su reacción se examina como una fuerza externa, entonces, ella tampoco efectúa trabajo en los desplazamientos debidos a $Z_k = 1$. Esto significa que dicho vínculo, también puede ser excluido del sistema buscado.

Así pues, el sistema buscado puede ser un sistema hiperestático **cualquiera** o, lo que por lo común resulta más cómodo, uno isostático obtenido del básico excluyendo obligatoriamente el vínculo k y otros superfluos cualesquiera, según nos parezca.

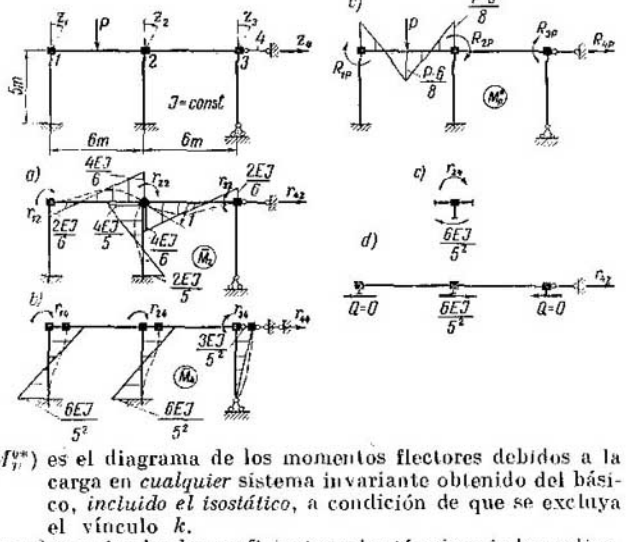
El trabajo de la carga aplicada al sistema **hallado**, es igual a:

$$\sum P\delta_{Pk} = \sum \int M_P^{0*} \frac{\overline{M}_k}{EJ}\, ds = (\overline{M}_P^{0*}) \cdot (\overline{M}_k^0).$$

La reacción buscada es

$$R_{kP} = -\sum \int M_P^{0*} \frac{\overline{M}_k}{EJ}\, ds = -(M_P^{0*}) \cdot (\overline{M}_k), \qquad (18.13)$$

Fig. 386



donde (M_i^{y*}) es el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga en *cualquier* sistema invariante obtenido del básico, *incluido el isostático*, a condición de que se excluya el vínculo k.

Una vez determinados los coeficientes y los términos independientes, las ecuaciones canónicas pueden ser presentadas numéricamente. Ellas pueden ser resueltas por diferentes procedimientos. Cuando el número de incógnitas básicas es grande se puede recomendar el de aproximaciones sucesivas.

§ 102. METODO ESTATICO DE DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES Y TERMINOS INDEPENDIENTES DE LAS ECUACIONES CANONICAS. En el párrafo anterior, fue expuesto el procedimiento general de determinación de los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas del método de desplazamientos. Paralelo a él existe otro método estático que, en muchos casos, es bastante claro y simple, basado en el empleo de las ecuaciones de la estática. Por cuanto los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas, de hecho, son las reacciones de los vínculos del sistema básico, ellos pueden ser determinados por las ecuaciones de equilibrio. Por ejemplo, cualquier reación de momento puede ser determinada de la condición de equilibrio de un nudo recortado del sistema básico, como la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas al nudo, con respecto a su centro. En muchos casos, cualquier reacción de fuerza puede ser determinada de la ecuación de equilibrio de alguna parte seccionada del sistema básico que contenga el vínculo de fuerza. Como ya fue dicho, la

dirección positiva de las reacciones de fuerza y de momento, que se determinan, coincide con la dirección positiva del desplazamiento unitario del vínculo dado en el sistema básico.

Expongamos la determinación de las reacciones en la forma general por el método estático en el ejemplo del pórtico (fig. 386). En la fig. 386, *a*, *b*, *c*, se han construido algunos diagramas unitarios y de carga. En estas mismas figuras se muestran las reacciones a determinar. Recordamos que el primer índice indica el vínculo en el cual surge la reacción y, el segundo, el desplazamiento que origina esta reacción.

La reacción unitaria r_{24} es la reacción del segundo vínculo originada por el desplazamiento del cuarto. El segundo vínculo es de momento. Por lo tanto, la reacción r_{24} se determina de la ecuación de equilibrio del nudo *2* recortado del sistema básico, que se halla bajo el desplazamiento unitario dado del cuarto vínculo de fuerza (fig. 386, *d*), o sea, con otras palabras, del equilibrio de este nudo, por el diagrama de $\overline{M}_4$.

Componemos la ecuación de equilibrio $r_{24} + \frac{6EJ}{5^2} = 0$, de donde obtenemos que

$$r_{24} = -\frac{6EJ}{5^2}.$$

Determinemos r_{42}, la reacción del cuarto vínculo de fuerza, debida al desplazamiento unitario del segundo vínculo de momento. Para esto, seccionamos la viga horizontal del sistema básico con el desplazamiento unitario del segundo vínculo (fig. 386, *a*, *e*) y examinamos su equilibrio. Al vínculo de fuerza le aplicamos la reacción positiva buscada r_{42} y, a los montantes seccionados del sistema les aplicamos las fuerzas transversales. Componemos la ecuación de equilibrio en forma de la suma de proyecciones sobre el eje paralelo a la viga horizontal

$$\sum X = r_{42} + \frac{6EJ}{5^2} = 0, \quad \text{de donde } r_{42} = -\frac{6EJ}{5^2} = r_{24}.$$

Determinemos R_{2P}, la reacción del segundo vínculo de momento, debida a la carga. Para esto, al sistema básico que se halla bajo carga le separamos el nudo *2* y examinamos su equilibrio, es decir, el equilibrio de este nudo en el diagrama de carga de M_P^b (fig. 386, *c*).

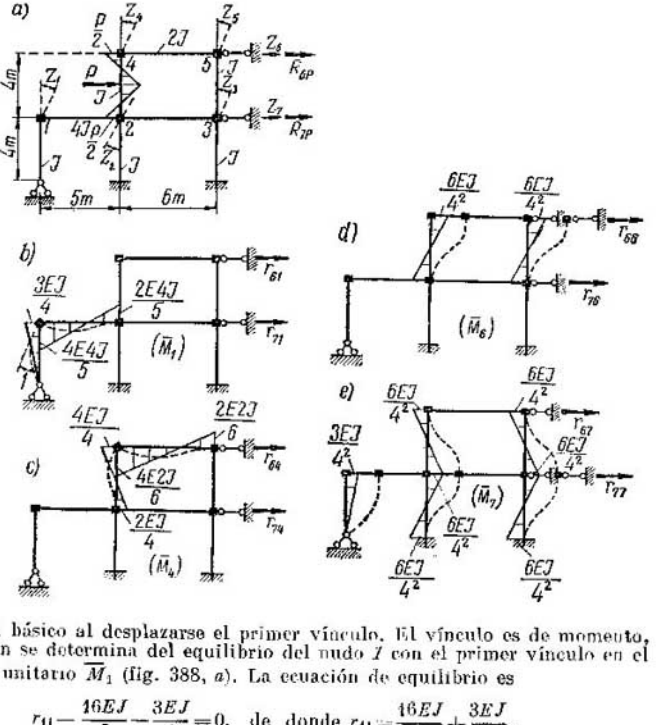
La ecuación de equilibrio es $R_{2P} - \frac{P \cdot 6}{8} = 0$, de donde $R_{2P} = \frac{P \cdot 6}{8}$.

En forma análoga se determinan las otras reacciones.

Ejemplo 49. Determinar las reacciones unitarias y de carga (fig. 387). El diagrama de carga se muestra en la fig. 387, *a*; los diagramas unitarios debidos a los desplazamientos angulares, en la 387, *b*, *c* y, los debidos a los desplazamientos progresivos, en la 387, *d* y *e*.

Determinamos r_{11}, la reacción del primer vínculo debida al desplazamiento de este mismo vínculo. Por consiguiente, esta reacción se debe determinar por

Fig. 387



el sistema básico al desplazarse el primer vínculo. El vínculo es de momento, su reacción se determina del equilibrio del nudo *1* con el primer vínculo en el diagrama unitario $\overline{M}_1$ (fig. 388, *a*). La ecuación de equilibrio es

$$r_{11}-\frac{16EJ}{5}-\frac{3EJ}{4}=0, \text{ de donde } r_{11}=\frac{16EJ}{5}+\frac{3EJ}{4}.$$

Determinamos r_{17}, la reacción del primer vínculo de momento debida al desplazamiento unitario del séptimo vínculo de fuerza. Ella se determina del equilibrio del nudo *1* en el diagrama de $\overline{M}_7$ (fig. 388, *b*). La ecuación de equilibrio es

$$r_{17}+\frac{3EJ}{16}=0, \text{ de donde, } r_{17}=-\frac{3EJ}{16}.$$

Determinamos r_{71}, la reacción del séptimo vínculo debida al desplazamiento unitario del primero. Por cuanto el séptimo vínculo es de fuerza, la reacción buscada se determina del equilibrio de la viga horizontal cortada del sistema básico, con el desplazamiento unitario del primer vínculo (fig. 388, *c*). La ecuación de equilibrio es

$$r_{71}+\frac{3EJ}{16}=0, \text{ de donde } r_{71}=-\frac{3EJ}{16}=r_{17}.$$

Determinamos r_{67}, la reacción del sexto vínculo debida al desplazamiento unitario del séptimo. El sexto vínculo es también de fuerza. Su reacción buscada se determina del equilibrio de la viga horizontal superior separada del sistema

básico, con el desplazamiento unitario del séptimo vínculo (fig. 388, *d*). La ecuación de equilibrio es

$$r_{67}+\frac{12EJ}{4^3}+\frac{12EJ}{4^3}=0, \text{ de donde } r_{67}=-\frac{24EJ}{4^3}.$$

Determinamos r_{76}, la reacción del séptimo vínculo debida al desplazamiento unitario del sexto. El séptimo vínculo es de fuerza, su reacción se determina del equilibrio de la viga horizontal inferior recortada del sistema básico, con el

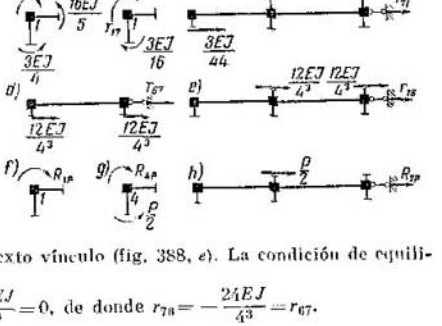


Fig. 388

desplazamiento unitario del sexto vínculo (fig. 388, *e*). La condición de equilibrio es

$$r_{76}+\frac{12EJ}{4^3}+\frac{12EJ}{4^3}=0, \text{ de donde } r_{76}=-\frac{24EJ}{4^3}=r_{67}.$$

Determinemos R_{1P}, la reacción de momento del primer vínculo debida a la carga. Ella se determina del equilibrio del nudo *1* en el diagrama de M_P^n (fig. 388, *f*). Dado que en las barras concurrentes en el nudo no hay momentos flectores, entonces, $R_{1P}=0$.

Determinemos R_{4P}, la reacción de momento del cuarto vínculo debida a la carga. En la fig. 388, *g*, se representa el nudo *4* recortado del sistema básico, durante la acción de la carga. De su equilibrio tenemos que

$$R_{4P}-\frac{P}{2}=0, \text{ de donde } R_{4P}=\frac{P}{2}$$

Determinamos R_{7P}, la reacción de fuerza del séptimo vínculo debida a la carga. Ella se determina del equilibrio de la viga horizontal inferior seccionada del sistema básico en estado de carga (fig. 388, *h*). La ecuación de equilibrio es

$$R_{7P}+\frac{P}{2}=0, \text{ de donde } R_{7P}=-\frac{P}{2}.$$

Determinemos esta misma reacción por la expresión del trabajo de las presiones nodales. Las presiones sobre los nudos *2* y *4*, debidas a la carga, son iguales a $\frac{P}{2}$. Al desplazarse el séptimo vínculo, el nudo *4* permanece en su sitio y, sobre él la presión nodal no realiza trabajo. El nudo *2* se desplaza en una unidad y el trabajo que la presión nodal realiza sobre él es igual a $\frac{P}{2}\cdot 1$. Esto significa que $R_{7P}=-\frac{P}{2}$.

Análogamente se determinan los restantes coeficientes y los términos independientes.

§ 193. OBSERVACIONES SOBRE LA DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES Y TERMINOS INDEPENDIENTES DE LAS ECUACIONES CANONICAS. Más arriba, fueron expuestos dos procedimientos de determinación de los coeficientes y términos, independientes de las ecuaciones canónicas, el general y el estático. El general es empleable para cualquier sistema y por medio de la multiplicación de diagramas permite obtener, en la forma general, las fórmulas para las reacciones.

El método estático es simple, evidente y cómodo en todos los casos de determinación de las reacciones de momento, pero al determinar las reacciones de fuerza solamente es cómodo cuando la parte separada con los elementos del sistema básico se obtiene por medio del seccionamiento de barras paralelas. La cuestión reside en que, al seccionar las barras no paralelas, las condiciones de equilibrio contendrán no sólo las fuerzas transversales, sino también, las longitudinales, cuya determinación es mucho más complicada que la de las primeras.

Por cuanto los que con más frecuencia se encuentran en la práctica son los pórticos con montantes verticales y con tirantes falsos horizontales o inclinados, el método estático merece particular atención. Su empleo, como veremos más abajo, permite controlar la corrección de los resultados obtenidos. Es necesario recurrir al procedimiento general de determinación de los coeficientes por medio de la multiplicación de diagramas, sólo en los casos complejos, por ejemplo, al determinar las reacciones de fuerza en los pórticos con montantes inclinados.

De tal modo, se puede recomendar lo siguiente:

1) Determinar todas las reacciones de momento unitarias, solamente por el equilibrio del nudo recortado, con vínculo de momento. Esto conduce a las siguientes fórmulas:

a) la reacción de momento propia es

$$r_{kk} = \sum_{e} 4i + \sum_{a} 3i, \qquad (18.14)$$

donde $\sum_{e}$ es la suma por las barras que concurren en el nudo k, cuyos otros extremos están empotrados y, $\sum_{a}$, la suma por las barras que concurren en el nudo k, en cuyos otros extremos hay apoyo articulado;

b) la reacción de momento secundaria del vínculo k, debida al ángulo de giro del otro vínculo de momento m, es

$$r_{km} = 2i, \qquad (18.15)$$

donde i es el coeficiente de rigidez de la barra $k - m$ que une a los nudos k y m;

c) la reacción de momento secundaria del vínculo k, debida al desplazamiento progresivo del vínculo n o la reacción secundaria

del vínculo n debida al giro del vínculo k, de igual magnitud que la primera, es

$$r_{kn} = \sum_{e} -\frac{6i}{l}\,\delta_n + \sum_{a} -\frac{3i}{l}\,\delta_n, \qquad (18.16)$$

donde, $\sum_{e}$ es la suma por las barras concurrentes al nudo con el vínculo de momento k, empotradas en los dos extremos y con los desplazamientos relativos δ_n, en dichos extremos, debidos a la dislocación unitaria del vínculo n, o sea, a $Z_n = 1$; $\sum_{a}$ idem, por las barras con articulaciones en los extremos opuestos al vínculo k. Recordamos que δ_n es positivo si, durante el desplazamiento, la cuerda de esta barra gira en sentido de las agujas del reloj.

2. Las reacciones de fuerza propias y secundarias, debidas a los desplazamientos progresivos, se deben determinar del equilibrio de la parte recortada del sistema cuando las barras (montantes) seccionadas son paralelas, pero, si las barras seccionadas son inclinadas, entonces, por medio de la miltiplicación de diagramas. La multiplicación de diagramas nos lleva a las siguientes fórmulas:

a) la reacción secundaria de fuerza del vínculo n, debida al desplazamiento progresivo del vínculo s es

$$r_{ns} = \sum_{e} \frac{12i}{l^2}\,\delta_n\delta_s + \sum_{a} \frac{3i}{l^2}\,\delta_n\delta_s, \qquad (18.17)$$

donde δ_n y δ_s son los desplazamientos relativos de los extremos de las barras del sistema básico, debidos a los desplazamientos unitarios progresivos de los vínculos de fuerza n y s, o sea, a $Z_n = 1$ y $Z_s = 1$; $\sum_{e}$ es la suma por las barras con empotramientos en los dos extremos, para las cuales, tanto δ_n como δ_s no son iguales a cero y $\sum_{a}$, la suma por las barras en uno de cuyos extremos tienen apoyo articulado;

b) la reacción propia del vínculo de fuerza n es

$$r_{nn} = \sum_{e} \frac{12i}{l^2}\,\delta_n^2 + \sum_{a} \frac{3i}{l^2}\,\delta_n^2. \qquad (18.18)$$

Las fórmulas (18.17) y (18.18) son simples y pueden ser también empleadas cuando las barras seccionadas son paralelas, para las cuales, corrientemente, δ_n y δ_s, en valor absoluto, son iguales a la unidad.

3. Determinar las reacciones de momento debidas a la carga R_{kp}, **sólo** por el equilibrio del nudo recortado k.

4. En todos los casos, es cómodo determinar las reacciones de fuerza, debidas a la carga, por el trabajo de las presiones nodales A_p en los desplazamientos unitarios del vínculo n, tomado con el signo contrario:

$$R_{np} = -\sum A_p\Delta_{np}. \qquad (18.19)$$

§ 194. CONSTRUCCION Y VERIFICACION DEL DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS FLECTORES DEBIDOS A LA CARGA. Una vez determinadas las incógnitas básicas $Z_1, \ldots, Z_n$ por las ecuaciones canónicas, el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga (diagrama de carga) se construye por la fórmula general

$$(M_P) = (\overline{M}_1) Z_1 + (\overline{M}_2) Z_2 + \ldots + (\overline{M}_n) Z_n + (M_P^0), \qquad (18.20)$$

donde

$(\overline{M}_1), \ldots, (\overline{M}_n)$ — son los diagramas de los momentos flectores debidos a los desplazamientos unitarios en el sistema básico;

(M_P^0) es el diagrama de los momentos flectores, en el sistema básico, debidos a la carga.

La verificación del diagrama de los momentos flectores reconstruido, puede ser efectuada, de la manera más simple, por medio de la determinación de las reacciones de los vínculos del sistema básico, debidas a la carga R_{kP}, si como diagrama de carga de M_P^0 se toma el diagrama de M_P que se verifica. Si todas las reacciones son iguales a cero, entonces, la construcción del diagrama es correcta. Esta es una condición necesaria de la corrección del diagrama y si los diagramas iniciales unitarios y de carga son correctos, es también suficiente. Esta condición refleja la de equilibrio. Por cuanto, en el sistema básico, los diagramas unitarios y de carga satisfacen las condiciones de equilibrio sólo conjuntamente con las reacciones de los vínculos, entonces, tal verificación, a diferencia de las estáticas en el método de fuerzas, donde todos los diagramas unitarios y el de carga en el sistema básico satisfacen las condiciones de equilibrio, es una verificación segura. No obstante, con ella no se pueden descubrir los datos iniciales tomados erróneamente. Así, por ejemplo, si durante el cálculo se emplearon valores incorrectos de la rigidez de las barras, entonces, con tal verificación, el error cometido no puede ser descubierto.

La multiplicación del diagrama de M_P obtenido por el unitario total de $\overline{M}_s$ conduce al siguiente resultado:

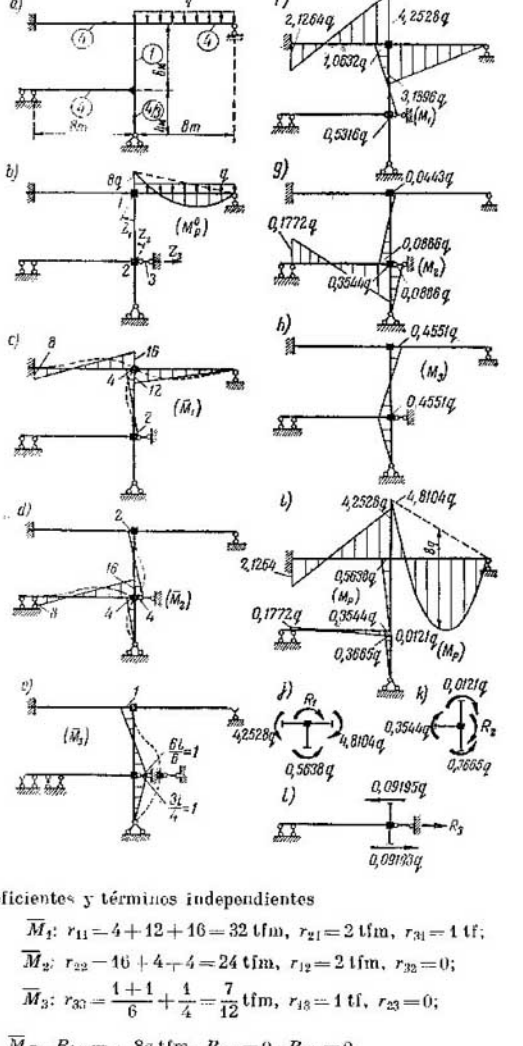
$$(M_P) \cdot (\overline{M}_s) + \sum R_{kP} = 0. \qquad (18.21)$$

La verificación, también es posible, con la multiplicación del diagrama obtenido por cualquier diagrama unitario o unitario total para cualquier sistema básico del método de fuerzas.

Ejemplo 50. Construir el diagrama de momentos flectores en el pórtico de la fig. 389, *a*. En el esquema del pórtico, los valores de los coeficientes de rigidez $i = \frac{EJ}{l}$ estarán colocados dentro de círculos. El sistema básico y los diagramas indispensables para el cálculo, se muestran en la fig. 389, *b*, *c*, *d*, *e*. El sistema de ecuaciones canónicas es:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} &= 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} &= 0. \end{aligned}$$

Fig. 389



Determinemos los coeficientes y términos independientes

del diagrama de $\overline{M}_1$: $r_{11}=4+12+16=32$ tfm, $r_{21}=2$ tfm, $r_{31}=1$ tf;

» » » $\overline{M}_2$: $r_{22}=16+4+4=24$ tfm, $r_{12}=2$ tfm, $r_{32}=0$;

» » » $\overline{M}_3$: $r_{33}=\dfrac{1+1}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$ tfm, $r_{13}=1$ tf, $r_{23}=0$;

» » » $\overline{M}_p$. $R_{1p}=-8q$ tfm, $R_{2p}=0$, $R_{3p}=0$.

Numéricamente, el sistema de ecuaciones canónicas es:

$$\begin{aligned} 32Z_1 + 2Z_2 - 1 \cdot Z_3 - 8q &= 0; \\ 2Z_1 + 24Z_2 + 0 \quad + 0 &= 0; \\ 1 \cdot Z_1 + 0 \quad + \frac{7}{12} Z_3 + 0 &= 0. \end{aligned}$$

Su solución es $Z_1 = 0{,}2658q$, $Z_2 = 0{,}02215q$, $Z_3 = -0{,}4551q$ m. Los diagramas corregidos se exponen en la fig. 389, *f*, *g*, *h* y, el buscado, en la fig. 389, *i*. Efectuamos su verificación.

Para esto recortamos la viga horizontal con el vínculo *3* y los nudos con los vínculos *1* y *2* (fig. 389, *j*, *k*, *l*). Las condiciones de equilibrio son: $R_1 + 4{,}8104q - 0{,}5658q - 4{,}2528q = 0$; $R_2 + 0{,}0121q + 0{,}3544q - 0{,}3665q = 0$; $R_3 + 0{,}09162q - 0{,}09195q = 0$. De donde obtenemos que: $R_1 = 0{,}0062q \approx 0$; $R_2 = 0$; $R_3 = 0{,}00033q \approx 0$. Las reacciones resultaron distintas de cero, pero se aproximan a ello, lo cual se explica por las inexactitudes del cálculo.

§ 195. CALCULO DE REFUERZOS DE APOYO. Se llaman *refuerzos de apoyo* los engrosamientos en los extremos de las vigas horizontales de los pórticos (fig. 390). Con tales engrosamientos, hablando rigurosamente, la viga horizontal se transforma en una barra quebrada de sección variable. Surge la necesidad de calcular previamente

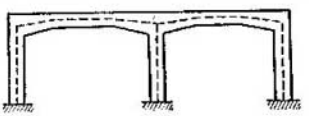


Fig. 390

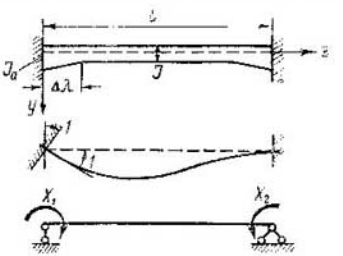
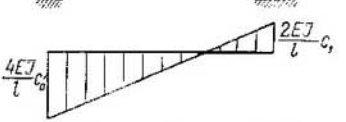


Fig. 391



los elementos estandart del sistema básico de sección variable bajo los desplazamientos unitarios de sus extremos y la acción de la carga. Corrientemente, es supone que la barra es rectilínea en toda su longitud y sólo posee sección variable (diferente rigidez) dentro de los límites de los refuerzos de apoyo. El cálculo de tales elementos se efectúa por el método de fuerzas. Por ejemplo, para el giro del extremo izquierdo de una viga, empotrada en los dos extremos, en un ángulo igual a la unidad (fig. 391), las ecuaciones canónicas para el sistema básico en forma de viga sobre dos apoyos, serán:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= 1; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= 0. \end{aligned}$$

Los coeficientes se determinan por la expresión

$$\delta_{km} = \int_0^{\lambda l} \overline{M}_k \frac{\overline{M}_m}{EJ(z)}\, dz + \frac{1}{EJ} \int_{\lambda l}^{l-\lambda l} \overline{M}_k \overline{M}_m\, dz + \int_{l-\lambda l}^{l} \overline{M}_k \frac{\overline{M}_m}{EJ(z)}\, dz.$$

El cálculo se reduce a la determinación de algunos coeficientes de corrección c_0 y c_1 para los momentos de los extremos de la barra de sección constante (fig. 391). En forma análoga, se estudian otros casos. Para los coeficientes de corrección existen tablas especiales [11]. He aquí algunas de ellas (tablas 13, 14 y 15).

Tabla 13

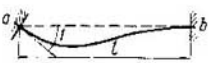
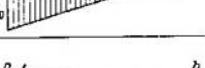
Esquema de vigas y desplazamientos	λ		$n=J:J_a$				
			1	0,6	0,3	0,25	0,20
	0,25	$c_0=$	1	1,260	1,667	1,801	1,958
	0,2		1	1,242	1,527	1,615	1,726
	0,25	$c_1=$	1	1,394	2,071	2,280	2,550
	0,2		1	1,326	1,840	1,989	2,178
	0,25	$a=$	1	1,163	1,376	1,429	1,493
	0,2		1	1,131	1,294	1,333	1,379

Tabla 14

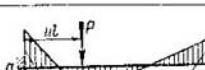
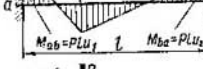
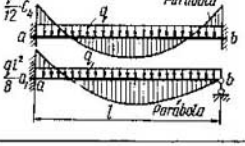
Carga	λ	$n=J:J_a$		u		
				0,25	0,50	0,75
	0,20	0,30	u_1	0,170	0,144	0,041
	0,20	0,30	u_2	0,041	0,144	0,170
	0,20	0,30	u_3	0,195	0,231	0,144
	0,20	0,25	u_1	0,173	0,146	0,041
	0,20	0,25	u_2	0,041	0,146	0,173
	0,20	0,25	u_3	0,199	0,237	0,149

Tabla 15

Cargas	λ	$n = J : J_0$	e_4	a_1
	0,20	0,30	1,128	1,212
	0,20	0,25	1,143	1,239

§ 196. CALCULO DE PORTICOS, CUYOS NUDOS NO TIENEN DESPLAZAMIENTOS PROGRESIVOS, BAJO CARGA NODAL. Si el pórtico no tiene desplazamientos progresivos de los nudos y, sobre él sólo actúa la carga nodal (fig. 392, *a*), entonces, todos

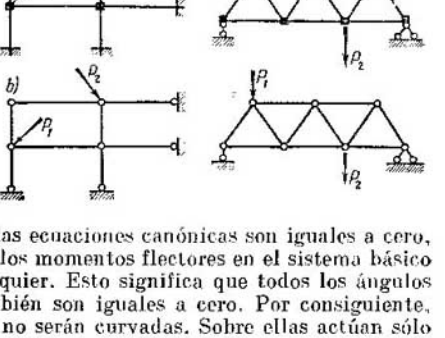


Fig. 392

los términos de carga de las ecuaciones canónicas son iguales a cero, dado que, para tal carga, los momentos flectores en el sistema básico son iguales a cero por doquier. Esto significa que todos los ángulos de giro de los nudos también son iguales a cero. Por consiguiente, las barras de los pórticos no serán curvadas. Sobre ellas actúan sólo fuerzas longitudinales que pueden ser halladas examinando el esquema articulado del pórtico (fig. 392, *b*). Todo esto es correcto, claro está, si se cumplen las hipótesis adoptadas en el método de desplazamientos, en particular, si en el cálculo se pueden despreciar las deformaciones de las barras debidas a las fuerzas longitudinales.

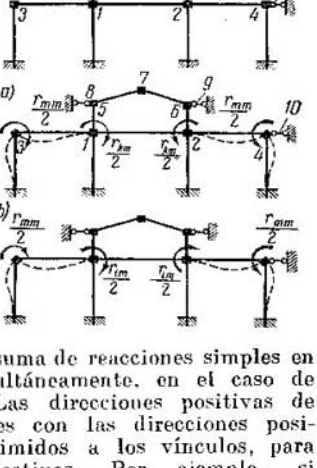
De este modo, hemos logrado cierta fundamentación del cálculo de las armaduras con nudos rígidos, con carga nodal, como armaduras con nudos articulados. No obstante, si se consideran las deformaciones debidas a las fuerzas longitudinales, entonces, las barras de la armadura serán curvadas y el valor de los momentos flectores dependerá del esquema de la armadura y de los coeficientes de rigi-

dez de sus barras. Por eso, el cálculo de una armadura con nudos rígidos, por el esquema articulado, es *aproximado*, incluso para carga nodal y, con más razón para carga no nodal.

§ 197. EMPLEO DE LA SIMETRIA. El empleo de la simetría en el método de desplazamientos, se basa en las mismas ideas que en el método de fuerzas. Los desplazamientos desconocidos de los nudos ubicados simétricamente se agrupan en nuevas incógnitas pares que representan desplazamientos simétricos y de simetría inversa. Como incógnita se toma el factor común del desplazamiento par, o sea, el desplazamiento generalizado para este desplazamiento par y se designa, como antes, con la letra Z.

Las ecuaciones canónicas se componen para los desplazamientos generalizados. La forma anterior de las ecuaciones canónicas se

Fig. 393



conserva. No obstante, los valores de las reacciones unitarias y de carga, en ellas, adquieren otro sentido. Aquí, r_{km} es la reacción generalizada correspondiente al desplazamiento generalizado Z_k debido al desplazamiento par de m por unidad de este desplazamiento generalizado Z_m; R_{kp} es la reacción generalizada correspondiente al desplazamiento generalizado Z_k debido a la carga. Las reacciones generalizadas se determinan como la suma de reacciones simples en los vínculos que se desplazan simultáneamente, en el caso de desplazamientos pares colectivos. Las direcciones positivas de las reacciones se toman coincidentes con las direcciones positivas de los desplazamientos impuestos a los vínculos, para los desplazamientos unitarios colectivos. Por ejemplo, si se designan los desplazamientos angulares simétricos de los nudos *1* y *2* (fig. 393) con Z_k y, los angulares de simetría inversa de los mismos nudos con Z_i entonces, las reacciones r_{km} y r_{im}, debidas a los desplazamientos simétricos Z_m de los nudos *3* y *4*, son iguales a la suma de dos reacciones en los vínculos *1* y *2*, la dirección positiva de los cuales se muestra en la figura. No es difícil convencerse de que la reacción inversamente simétrica r_{im}, correspondiente al desplazamiento de simetría inversa Z_i, debido al desplazamiento simétrico Z_m de los nudos *3* y *4*, es igual

a cero. En esto, precisamente, consiste el sentido del empleo de las incógnitas pares en forma de desplazamientos simétricos y de simetría inversa. *Las reacciones simétricas debidas a los desplazamientos y la carga de simetría inversa y las reacciones de simetría inversa debidas a los desplazamientos y la carga simétricos son iguales a cero.* Por eso, lo mismo que en el método de fuerzas, las ecuaciones canónicas se descomponen, cualquiera que sea la carga, en dos sistemas independientes: uno posee sólo incógnitas simétricas y, el otro, de simetría inversa. Por esta razón, en el caso de carga simétrica, todos los desplazamientos de simetría inversa son iguales a cero y, siendo la carga de simetría inversa, todos los desplazamientos simétricos son iguales a cero.

Los desplazamientos por la dirección de los vínculos ubicados sobre el eje de simetría, por ejemplo, por la dirección del *7* (fig. 393) o por la de los ubicados sólo a un lado del eje de simetría, por ejemplo, por la del *10* (fig. 393), poseen simetría o simetría inversa y no se agrupan. El ángulo de giro inversamente simétrico del nudo es un desplazamiento por la dirección del vínculo *7* y, el desplazamiento de simetría inversa progresivo de los nudos del primer piso, es un desplazamiento por la dirección del vínculo *10*.

El empleo de la simetría en el método de desplazamientos, también es posible en el caso, cuando el sistema posee dos ejes de simetría. En este caso, lo mismo que en el método de fuerzas, el agrupamiento se efectúa por los dos ejes en cuatro desplazamientos.

§ 198. MÉTODO ESTÁTICO DE CONSTRUCCIÓN DE LÍNEAS DE INFLUENCIA. El método estático de construcción de líneas de influencia se reduce al cálculo del sistema dado bajo la carga unitaria $P = 1$, cuya posición se determina por la coordenada variable. Aquí, como en el método de fuerzas, al principio es necesario construir las líneas de influencia de las incógnitas básicas (de los ángulos de giro y desplazamientos progresivos de los nudos) y luego, por ellas, construir las líneas de influencia, de las fuerzas internas.

1. LÍNEAS DE INFLUENCIA DE LOS DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y PROGRESIVOS DE LOS NUDOS

Las expresiones de las líneas de influencia de las incógnitas básicas por medio de los coeficientes de influencia, tienen la forma

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \beta_{11} r_{1P} + \beta_{12} r_{2P} + \ldots + \beta_{1n} r_{nP}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_n &= \beta_{n1} r_{1P} + \beta_{n2} r_{2P} + \ldots + \beta_{nn} r_{nP}. \end{aligned}\right\} \qquad (18.22)$$

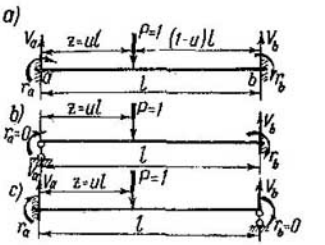
Los coeficientes de influencia se determinan lo mismo que en el método de fuerzas. Los términos de carga del tipo r_{kP} son funciones de la posición del peso $P = 1$. Ellos pueden ser obtenidos o directamente, como reacciones de los vínculos del sistema básico debidas al peso unitario (fig. 394) o por el teorema de la reciprocidad $r_{kP} = -\delta_{Pk}$, como ordenadas de los diagramas de los desplazamientos

de las barras, debidos a los giros unitarios y desplazamientos progresivos de los nudos en el sistema básico. Las fórmulas de las reacciones debidas al peso $P = 1$ se dan a continuación y, los valores numéricos de las diferentes funciones contenidos en las expresiones de las reacciones, se dan en la tabla 16.

Viga empotrada en los dos extremos (fig. 394, *a*);

$$\left.\begin{aligned} r_a &= -u(1-u)^2 l = -lf_3(u); \quad r_b = (1-u)u^2 l = lf_4(u); \\ V_a &= 1-u^2(3-2u) = \varphi_1(u); \quad V_b = 1 - V_a = 1 - \varphi_1(u). \end{aligned}\right\} \tag{18.23}$$

Fig. 394



En la sección $z = a$, las ecuaciones de las líneas de influencia de M y Q son:

el peso está a la derecha de la sección: $M = r_a + V_a a$, $Q = V_a$;
» » » » » izquierda » » » : $M = r_a + V_a a - 1\,(a - ul)$;
$Q = V_a - 1 = -V_b$. (18.24)

Viga con el extremo derecho empotrado y el izquierdo apoyado en una articulación (fig. 394, *b*).

$$r_b = \frac{u}{2}(1-u^2)\,l = lf_5(u), \quad V_a = 1 - \frac{u}{2}(3-u^2) = \varphi_2(u),$$
$$V_b = 1 - \varphi_2(u). \tag{18.25}$$

En la sección $z = a$, las ecuaciones de las líneas de influencia de M y Q son:

el peso está a la derecha de la sección: $M = V_a a$, $Q = V_a$;
» » » » » izquierda » » » : $M = V_a a - 1\,(a - ul)$,
$Q = V_a - 1 = -V_b$. (18.26)

Viga con el extremo izquierdo empotrado y el derecho apoyado en una articulación (fig. 394, *c*).

$$\left.\begin{aligned} r_a &= -\frac{u}{2}(1-u)(2-u)\,l = -lf_6(u); \\ V_a &= 1 - \frac{u^2}{2}(3-u) = \varphi_3(u) \quad V_b = 1 - \varphi_3(u). \end{aligned}\right\} \tag{18.27}$$

Tabla 16

$u=\frac{z}{l}$	$f_3(u)=u(1-u)^2$	$f_4(u)=(1-u)u^2$	$\varphi_1(u)=1-u^2(3-2u)$	$f_5(u)=\frac{u}{2}(1-u^2)$	$\varphi_2(u)=1-\frac{u}{2}(3-u^2)$	$f_6(u)=\frac{u}{2}(1-u)(2-u)$	$\varphi_3(u)=1-\frac{u^3}{2}(3-u)$
0	0	0	1,0000	0	1,0000	0	1,0000
0,1	0,0810	0,0090	0,9720	0,0495	0,8505	0,0855	0,9855
0,2	0,1280	0,0320	0,8960	0,0960	0,7040	0,1440	0,9440
0,25	0,1406	0,0469	0,8437	0,1172	0,6328	0,1640	0,9140
0,3	0,1470	0,0630	0,7840	0,1365	0,5635	0,1785	0,8785
0,4	0,1440	0,0960	0,6480	0,1680	0,3920	0,1920	0,7920
0,5	0,1250	0,1250	0,5000	0,1875	0,3125	0,1875	0,6875
0,6	0,0960	0,1440	0,3520	0,1920	0,2080	0,1680	0,5680
0,7	0,0630	0,1470	0,2160	0,1785	0,1215	0,1365	0,4365
0,75	0,0469	0,1406	0,1563	0,1640	0,0860	0,1172	0,3672
0,8	0,0320	0,1280	0,1040	0,1440	0,0560	0,0960	0,2960
0,9	0,0090	0,0810	0,0280	0,0855	0,0145	0,0495	0,1495
1,0	0	0	0	0	0	0	0

En la sección $z = a$, las ecuaciones de las líneas de influencia de M y Q son:

el peso está a la derecha de la sección: $M = r_a + V_a a$, $Q = V_a$;
» » » » » izquierda » » » : $M = r_a + V_a a - 1\,(a - ul)$, $Q = V_a - 1 = -V_b$.

(18.28)

Las igualdades (18.22) en la forma matriz, serán:

$$Z = BR_P = \begin{Vmatrix} \beta_{11}\beta_{12} \cdots \beta_{1n} \\ \beta_{21}\beta_{22} \cdots \beta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n1}\beta_{n2} \cdots \beta_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} r_{1P} \\ r_{2P} \\ \cdots \\ r_{nP} \end{Vmatrix}. \qquad (18.29)$$

Y aquí, si sólo se exige calcular las ordenadas de la línea de influencia en algunos puntos de la posición del peso y no la ecuación de la

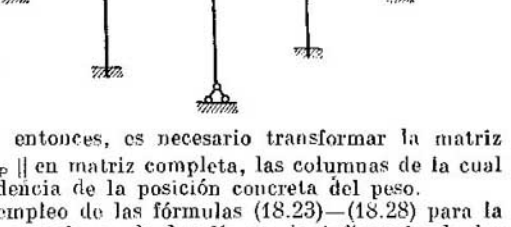


Fig. 395

línea de influencia, entonces, es necesario transformar la matriz de columna $\overline{R}_P \| r_{iP} \|$ en matriz completa, las columnas de la cual darán R_P en dependencia de la posición concreta del peso.

Examinemos el empleo de las fórmulas (18.23)—(18.28) para la composición de las ecuaciones de las líneas de influencia de las incógnitas básicas de los ángulos de giro y desplazamientos progresivos por las expresiones (18.22), en el ejemplo de un pórtico de puente (fig. 395).

Las expresiones de las líneas de influencia de las incógnitas básicas por medio de los coeficientes de influencia, son:

$$\left.\begin{aligned} &\text{l.i. de } Z_1 = \beta_{11}r_{1P} + \beta_{12}r_{2P} + \beta_{13}r_{3P} + \beta_{14}r_{4P}; \\ &\text{l.i. de } Z_2 = \beta_{21}r_{1P} + \beta_{22}r_{2P} + \beta_{23}r_{3P} + \beta_{24}r_{4P}; \\ &\text{l.i. de } Z_3 = \beta_{31}r_{1P} + \beta_{32}r_{2P} + \beta_{33}r_{3P} + \beta_{34}r_{4P}; \\ &\text{l.i. de } Z_4 = \beta_{41}r_{1P} + \beta_{42}r_{2P} + \beta_{43}r_{3P} + \beta_{44}r_{4P}. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Los valores de los términos de carga r_{1P}, r_{2P}, r_{3P} y r_{4P}, los determinamos en dependencia de la posición del peso $P = 1$ por los tramos del pórtico.

El peso se halla en el primer tramo. Las reacciones $r_{2P} = r_{3P} = -r_{4P} = 0$. Dado que, en el sistema básico, la viga horizontal del primer tramo representa una viga con el apoyo derecho empotrado

y el izquierdo apoyado en una articulación, entonces, según (18.25), obtenemos que

$$r_{1P} = l_1 \frac{u(1-u^2)}{2} = l_1 f_5(u).$$

Ahora, de acuerdo con (a), las ecuaciones de todas las líneas de influencia, para la posición del peso en el primer tramo, serán:

$$\left.\begin{array}{l} \text{l.i. de } Z_1 = \beta_{11} l_1 f_5(u); \quad \text{l.i. de } Z_3 = \beta_{31} l_1 f_5(u); \\ \text{l.i. de } Z_2 = \beta_{21} l_1 f_5(u); \quad \text{l.i. de } Z_4 = \beta_{41} l_1 f_5(u). \end{array}\right\} \qquad (b)$$

El peso se halla en el segundo tramo. Para la posición del peso en el segundo tramo, la reacción $r_{3P} = r_{4P} = 0$.

En el sistema básico, la viga horizontal del segundo tramo representa una viga con los dos extremos empotrados. Por eso, según (18.23),

$$r_{1P} = -l_2 u(1-u)^2 = -l_2 f_3(u), \quad r_{2P} = l_2 u^2 (1-u) = l_2 f_4(u).$$

De acuerdo con (a), las ecuaciones de las líneas de influencia son:

$$\left.\begin{array}{l} \text{l.i. de } Z_1 = -\beta_{11} l_2 f_3(u) + \beta_{12} l_2 f_4(u); \\ \text{l.i. de } Z_2 = -\beta_{21} l_2 f_3(u) + \beta_{22} l_2 f_4(u); \\ \text{l.i. de } Z_3 = -\beta_{31} l_2 f_3(u) + \beta_{32} l_2 f_4(u); \\ \text{l.i. de } Z_4 = -\beta_{41} l_2 f_3(u) + \beta_{42} l_2 f_4(u). \end{array}\right\} \qquad (c)$$

El peso se halla en el tercer tramo. Análogamente, tendremos que $r_{1P} = r_{4P} = 0$.

$$r_{2P} = -l_3 u(1-u)^2 = -l_3 f_3(u), \quad r_{3P} = l_3 u^2 (1-u) = l_3 f_4(u).$$

Las ecuaciones de influencia son:

$$\left.\begin{array}{l} \text{l.i. de } Z_1 = -\beta_{12} l_3 f_3(u) + \beta_{13} l_3 f_4(u); \\ \text{l.i. de } Z_2 = -\beta_{22} l_3 f_3(u) + \beta_{23} l_3 f_4(u); \\ \text{l.i. de } Z_3 = -\beta_{32} l_3 f_3(u) + \beta_{33} l_3 f_4(u); \\ \text{l.i. de } Z_4 = -\beta_{42} l_3 f_3(u) + \beta_{43} l_3 f_4(u). \end{array}\right\} \qquad (d)$$

El peso se halla en el cuarto tramo. En este caso, sólo r_{3P} no es igual a cero. En el sistema básico, la viga horizontal del cuarto tramo representa una viga con el apoyo izquierdo empotrado y el derecho apoyado en una articulación.

De acuerdo con (18.27), obtenemos que

$$r_{3P} = -l_4 \frac{u}{2}(1-u)(2-u) = -l_4 f_6(u).$$

Las ecuaciones de las líneas de influencia son:

$$\left.\begin{array}{l} \text{l.i. de } Z_1 = -\beta_{13} l_4 f_6(u); \\ \text{l.i. de } Z_2 = -\beta_{23} l_4 f_6(u); \\ \text{l.i. de } Z_3 = -\beta_{33} l_4 f_6(u); \\ \text{l.i. de } Z_4 = -\beta_{43} l_4 f_6(u). \end{array}\right\} \qquad (e)$$

2. LINEAS DE INFLUENCIA DE LAS FUERZAS SUSTITUYENTES (INTERNAS)

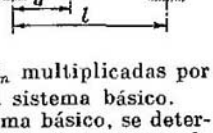
Las líneas de influencia de las fuerzas internas M, Q y N pueden ser construidas por las líneas de influencia de las incógnitas básicas, por la expresión general

$$\text{l.i. de } S = (\text{l.i. de } Z_1)\,\overline{S}_1 + (\text{l.i. de } Z_2)\,\overline{S}_2 + \ldots$$
$$\ldots + (\text{l.i. de } Z_n)\,\overline{S}_n + \text{l.i. de } S^0, \qquad (18.30)$$

donde l.i. de Z_i son las líneas de influencia de las incógnitas básicas; $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_n$, coeficientes; l.i. de S^0 es la línea de influencia de la fuerza interna examinada en el sistema básico.

Por consiguiente, la línea de influencia de una fuerza interna se obtiene con la suma de las líneas de influencia de S^0 de dicha fuerza interna en el sistema básico del método de desplazamientos y las

Fig. 396



líneas de influencia de las incógnitas $Z_1, \ldots, Z_n$ multiplicadas por las fuerzas internas unitarias $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_n$ en el sistema básico.

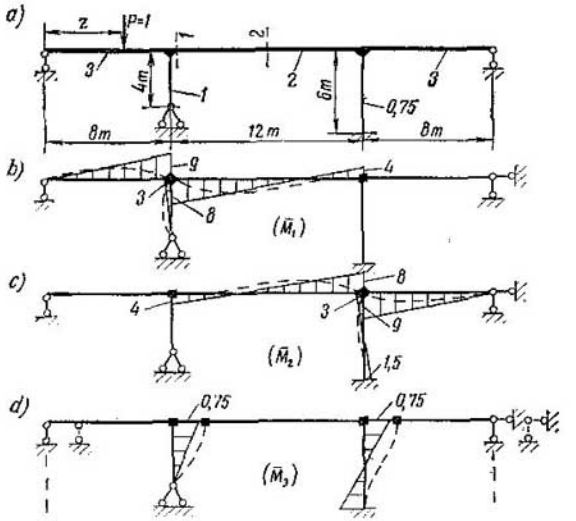
Las líneas de influencia de M y Q, en el sistema básico, se determinan por las expresiones (18.24), (18.26) y (18.28). Los valores de $\overline{M}$ y $\overline{Q}$ se calculan con facilidad de los diagramas unitarios de los momentos flectores.

La construcción de la línea de influencia de la fuerza longitudinal N es un poco más complicada. En el sistema básico, las fuerzas longitudinales se expresan por medio de las fuerzas transversales y, además, estas expresiones dependen del tipo de sistema, por lo cual no se pueden componer, en una forma general, expresiones, terminadas para las fuerzas longitudinales. Por eso, es más cómodo construir las líneas de influencia de las fuerzas longitudinales, no por la expresión (18.30), sino por las líneas de influencia de las fuerzas transversales por medio de las cuales ellas se expresan.

Indicamos aún un procedimiento posible para construir las l.i. de M y Q en las secciones de las barras por las líneas de influencia de los momentos nodales, las cuales deberán ser construidas previamente por (18.30). En la sección de una barra, las expresiones para M y Q son las mismas que para una viga continua (fig. 396):

$$\left.\begin{aligned} M_a &= M_a^{\text{vig}} + M_{\text{izq}}\frac{l-a}{l} + M_{\text{der}}\frac{a}{l}\,; \\ Q_a &= Q_a^{\text{vig}} + \frac{M_{\text{der}} - M_{\text{izq}}}{l}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (18.31)$$

Fig. 397



Esto significa que, en las secciones de una barra, las l.i. de M y Q pueden ser construidas sumando las l.i. de M_a^{vig} y Q_a^{vig} en una viga simple y las l.i. de los momentos de apoyo M_{izq} y M_{der}.

Ejemplo 51. Construir las líneas de influencia de los desplazamientos de los nudos, los momentos flectores y las fuerzas transversales en las secciones dadas *1* y *2* del pórtico (fig. 397). En el esquema del pórtico, los valores de los coeficientes de rigidez $i = \frac{EJ}{l}$ se han colocado dentro de círculos.

Líneas de influencia de los desplazamientos. En la fig. 397, *b*, *c*, *d*, están representados los diagramas unitarios. Las ecuaciones canónicas son:

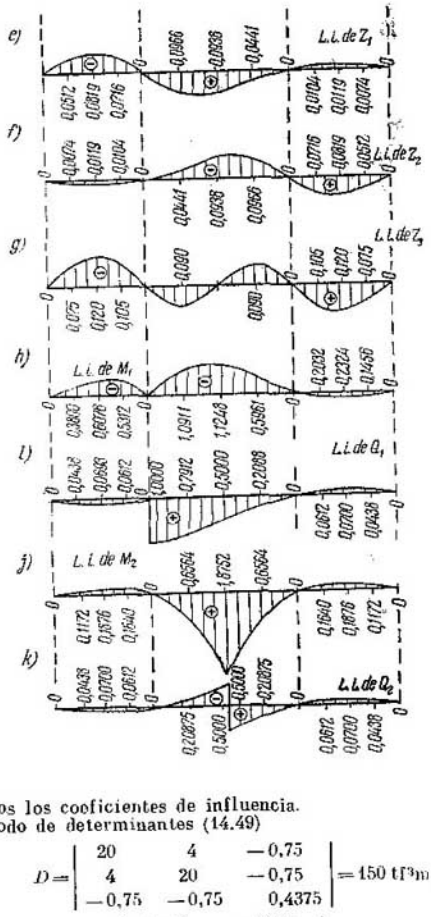
$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + r_{1P} = 0;$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + r_{2P} = 0;$$
$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + r_{3P} = 0.$$

Sus coeficientes son: $r_{11} = 9 + 8 + 3 = 20$ tfm, $r_{21} = 4$ tfm, $r_{31} = -0{,}75$ tf, $r_{12} = 4$ tfm, $r_{22} = 8 + 9 + 3 = 20$ tfm, $r_{32} = -0{,}75$ tf, $r_{13} = -0{,}75$ tf,

$$r_{33} = \frac{0{,}75}{4} + \frac{1{,}5}{6} = 0{,}4375 \text{ tf/m}.$$

Las ecuaciones canónicas, en números son:

$$20Z_1 + 4Z_2 - 0{,}75Z_3 + r_{1P} = 0; \quad 4Z_1 + 20Z_2 - 0{,}75Z_3 + r_{2P} = 0;$$
$$-0{,}75Z_1 - 0{,}75Z_2 + 0{,}4375Z_3 + r_{3P} = 0.$$



Calculamos los coeficientes de influencia.

a) Por el método de determinantes (14.49)

$$D = \begin{vmatrix} 20 & 4 & -0,75 \\ 4 & 20 & -0,75 \\ -0,75 & -0,75 & 0,4375 \end{vmatrix} = 150 \text{ tf}^3\text{m};$$

$$\beta_{11} = (-1)^{(1+1-1)} \frac{1}{150} \begin{vmatrix} 20 & -0,75 \\ -0,75 & 0,4375 \end{vmatrix} = -0,054583 \frac{1}{\text{tfm}};$$

$$\beta_{12} = (-1)^{(1+2-1)} \frac{1}{150} \begin{vmatrix} 4 & -0,75 \\ -0,75 & 0,4375 \end{vmatrix} = 0,0079166 \frac{1}{\text{tfm}};$$

$$\beta_{13} = (-1)^{(1+3-1)} \frac{1}{150} \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ -0,75 & -0,75 \end{vmatrix} = -0,08 \frac{1}{\text{tf}};$$

$$\beta_{22}=(-1)^{(2+2-1)}\frac{1}{150}\begin{vmatrix}20 & -0,75\\ -0,75 & 0,4375\end{vmatrix}=-0,054583\ \frac{1}{\text{tfm}};$$

$$\beta_{23}=(-1)^{(2+3-1)}\frac{1}{150}\begin{vmatrix}20 & 4\\ -0,75 & -0,75\end{vmatrix}=-0,08\ \frac{1}{\text{tf}};$$

$$\beta_{33}=(-1)^{(3+3-1)}\frac{1}{150}\begin{vmatrix}20 & 4\\ 4 & 20\end{vmatrix}=-2,56\ \text{m/tf}.$$

b) Por el método de Gauss:
El desarrollo directo se da en la tabla 17.

Calculamos los coeficientes de influencia por (14.59) y (14.60).

1ª **operación.** Para la fórmula (14.59) $k=3$ y para la (14.60) $k=3$; $i=2$ e $l=1$.

$$\beta_{33}=-\frac{1}{r_{33}^{(2)}}=-\frac{1}{0,3906}=-2,56\ \text{m/tf};$$

$$\beta_{23}=\alpha_{23}\beta_{33}=0,03125\,(-2,56)=-0,08\ \frac{1}{\text{tf}};$$

$$\beta_{13}=\alpha_{12}\beta_{23}+\alpha_{13}\beta_{33}=(=0,2)\,(-0,08)+0,0375\,(-2,56)=-0,08\ \frac{1}{\text{tf}}.$$

Verificación por (14.47)

$$r_{31}\beta_{13}+r_{32}\beta_{23}+r_{33}\beta_{33}+1=0;$$

$$(-0,75)\,(-0,08)+(-0,75)\,(-0,08)+0,4375\,(-2,56)+1=0.$$

2ª **operación.** Para la fórmula (14.59) $k=2$ y, para la (14.60), $k=2$ e $l=1$.

$$\beta_{22}=\frac{1}{r_{22}}+\alpha_{23}\beta_{23}=-\frac{1}{19,2}+0,03125\,(-0,08)=-0,054583\ \frac{1}{\text{tfm}};$$

$$\beta_{12}=\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{13}\beta_{32}=-0,2\,(-0,054583)+0,0375\,(-0,08)=0,0079166\ \frac{1}{\text{tfm}}.$$

Verificación por (14.47)

$$r_{21}\beta_{12}+r_{22}\beta_{22}+r_{23}\beta_{32}+1=0;$$

$$4\cdot 0,0079166+20\,(-0,054583)-0,75\,(-0,08)+1=1,091664-1,09166\approx 0.$$

3ª **operación.** Para la fórmula (14.59) $k=1$.

$$\beta_{11}=-\frac{1}{r_{11}}+\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{13}\beta_{13}=-\frac{1}{20}+(-0,2)\cdot 0,0079166+$$

$$+0,0375\,(-0,08)=-0,054583\,\frac{1}{\text{tfm}}.$$

Verificación por (14.47)

$$r_{11}\beta_{11}+r_{12}\beta_{21}+r_{13}\beta_{31}+1=0;$$

$$20\,(-0,054583)+4\,(0,0079166)-0,75\,(-0,08)+1=-1,09166+1,091666\approx 0.$$

Por consiguiente, las incógnitas básicas se expresan por medio del coeficiente de influencia, del siguiente modo:

$$\left.\begin{aligned}Z_1&=-0,05458r_{1P}+0,007917r_{2P}-0,08r_{3P};\\ Z_2&=0,007917r_{1P}-0,05458r_{2P}-0,08r_{3P};\\ Z_3&=-0,08r_{1P}-0,08r_{2P}-2,56r_{3P}.\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

Tabla 17

Nº de la línea	Nº de la ecuación del coeficiente α	Incógnitas			Suma de los coeficientes
		z_1	z_2	z_3	
1	(1)	20	4	−0,75	23,25
2	α_{1k}	●	$\alpha_{12}=-\frac{4}{20}$	$\alpha_{13}=-\frac{-0,75}{20}=0,0375$	
3	(2)	4	20	−0,75	23,25
4	$\alpha_{12}\cdot(1)$	●	−0,8	+0,15	−4,65
5	$(2^{(1)})$	●	19,2	−0,6	↓ → 18,6
6	α_{2k}	●	●	$\alpha_{23}=-\frac{-0,6}{19,2}=0,03125$	
7	(3)	−0,75	−0,75	0,4375	−1,0625
8	$\alpha_{13}\cdot(1)$	●	●	−0,0281	0,8719
9	$\alpha_{23}\,(2^{(1)})$	●	●	−0,0188	0,5812
10	$(3^{(2)})$	●	●	0,3906	↓ → 0,3906

En el caso de carga vertical, $r_{3P}=0$, r_{12} y r_{2P} dependen de la posición del peso $P=1$.

El peso se halla en el primer tramo. Por (18.23),

$$r_{1P}=l_1\frac{u(1-u^2)}{2}=8\frac{u(1-u^2)}{2},\quad r_{2P}=0. \tag{b}$$

Las ecuaciones de las líneas de influencia son:

$$\left.\begin{aligned}&\text{l.i. de } Z_1=-0{,}05458\cdot 8\frac{u(1-u^2)}{2},\quad \text{l.i. de } Z_2=0{,}007917\cdot 8\frac{u(1-u^2)}{2},\\ &\text{l.i. de } Z_3=-0{,}08\cdot 8\frac{u(1-u^2)}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{b'}$$

El peso se halla en el segundo tramo. Por (18.23),

$$\left.\begin{aligned}r_{1P}&=-l_2u(1-u)^2=-12u(1-u)^2,\\ r_{2P}&=l_2u^2(1-u)=12u^2(1-u).\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Las ecuaciones de la línea de influencia son:

$$\left.\begin{aligned}&\text{l.i. de } Z_1=0{,}05458\cdot 12u(1-u)^2+0{,}007917\cdot 12u^2(1-u);\\ &\text{l.i. de } Z_2=0{,}007917\cdot 12u(1-u)^2-0{,}05458\cdot 12u^2(1-u);\\ &\text{l.i. de } Z_3=-0{,}08\cdot 12u(1-u)^2-0{,}08\cdot 12u^2(1-u).\end{aligned}\right\} \tag{c'}$$

El peso se halla en el tercer tramo. Por (18.27),

$$r_{2P}=-l_3\frac{u}{2}(1-u)(2-u)=-8\frac{u}{2}(1-u)(2-u);\quad r_{1P}=0. \tag{d}$$

Las ecuaciones de las líneas de influencia son:

$$\left.\begin{aligned}&\text{l.i. de } Z_1=-0{,}007917\cdot 8\frac{u}{2}(1-u)(2-u);\\ &\text{l.i. de } Z_2=0{,}05458\cdot 8\frac{u}{2}(1-u)(2-u);\\ &\text{l.i. de } Z_3=0{,}08\cdot 8\frac{u}{2}(1-u)(2-u).\end{aligned}\right\} \tag{d'}$$

Las líneas de influencia se muestran en la fig. 397, *e*, *f*, *g*.

Las líneas de influencia de los momentos flectores y las fuerzas transversales. En las secciones 1—1, las líneas de influencia de M y Q, por (18.30), son:

$$\text{l.i. de } M_1=(\text{l.i. de } Z_1)\,8+(\text{l.i. de } Z_2)\,4+\text{l.i. de } M_1^0;$$

$$\text{l.i. de } Q_1=(\text{l.i. de } Z_1)(-1)+(\text{l.i. de } Z_2)(-1)+\text{l.i. de } Q_1^0,$$

donde, para la posición del peso en el segundo tramo, de acuerdo a (18.23)

$$M_1^0=r_a=-u(1-u)^2\,12;$$

$$Q_1^0=V_a=1-u^2(3-2u)$$

para $u=\frac{z}{12}$.

En la sección 2—2, las ecuaciones de influencia de M y Q por (18.30), son:

$$\text{l.i. de } M_2=(\text{l.i. de } Z_1)\,2+(\text{l.i. de } Z_2)(-2)+\text{l.i. de } M_2^0,$$

donde, por (18.24), para la posición del peso en el segundo tramo:

a la derecha de la sección: $M_2^2 = -u(1-u)^2 12 + [1-u^2(3-2u)]6$;

a la izquierda de la sección: $M_2^2 = -u(1-u)^2 12 + [1-u^2(3-2u)]6 - 1(6-12u)$;

l.i. de $Q_2 =$ (l.i. de Z_1) $(-1)+$ (l.i. de Z_2) $(-1)+$ l.i. de Q_2^2,

donde, para la posición del peso en el segundo tramo:

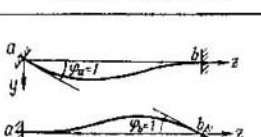
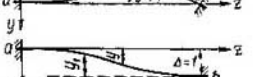
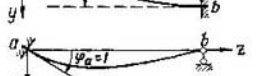
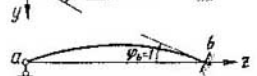
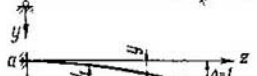
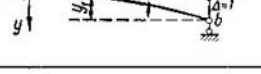
a la derecha de la sección: $Q_2^2 = 1-u^2(3-2u)$;

a la izquierda de la sección: $Q_2^2 = -u^2(3-2u)$.

Para la posición del peso en el primer y tercer tramo, M^0 y Q^0 son iguales a cero. En la fig. 397, *h*, *i*, *j* y *k*, están representadas las líneas de influencia de M y Q.

§ 199. METODO CINEMATICO DE CONSTRUCCION DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA DE LOS DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y PROGRESIVOS DE LOS NUDOS. *La línea de influencia del ángulo de giro* del sistema dado, es el diagrama de los desplazamientos verticales de su línea de carga, debidos al momento externo $M_k = 1$ aplicado en este nudo (fig. 398, *a*), y la *línea de influencia del desplazamiento progresivo*, de los debidos a la fuerza externa $P_m = 1$ aplicada por la dirección del desplazamiento progresivo (fig. 398, *b*).

Tabla 18

Tipos de desplazamientos de los extremos de las barras	Ecuación del eje de una barra curvada $\left(u=\frac{z}{l}\right)$
	$y = -lu(1-u)^2 = -lf_3(u)$
	$y = -l(1-u)u^2 = -lf_4(u)$
	$y = u^2(3-2u) = 1-\varphi_1(u)$; $y_1 = 1-y = \varphi_1(u)$
	$y = l\frac{1}{2}u(1-u)(2-u) = lf_6(u)$
	$y = -l\frac{1}{2}u(1-u^2) = -lf_5(u)$
	$y = \frac{u^2}{2}(3-u) = 1-\varphi_3(u)$; $y_1 = 1-y = \varphi_3(u)$

Deberán ser hallados los ángulos de giro y desplazamientos progresivos de los nudos del pórtico debidos a tales cargas, después de lo cual, la línea de influencia se construye sobre la base de los datos de la tabla 18.

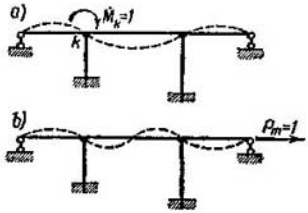


Fig. 398

§ 200. CALCULO DE LA ACCION DE LA TEMPERATURA Y LOS DISLOCAMIENTOS DE LOS APOYOS. Para el cálculo de la acción de la temperatura, las ecuaciones canónicas tienen la forma

$$r_{k1}Z_1 r_{k2}Z_2 + \ldots + r_{kn}Z_n R_{kt} = 0. \qquad (18.32)$$

Para la determinación de R_{kt} es indispensable tener los diagramas térmicos de los momentos flectores en el sistema básico. Para esto, examinemos dos barras estandart del sistema básico sometidas

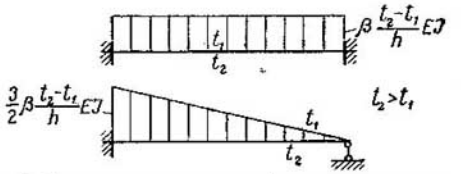


Fig. 399

a la acción de la variación de la temperatura por abajo t_2 y por arriba t_1, siendo $t_2 \geqslant t_1$. En la fig. 399 se exponen los diagramas de los momentos flectores debidos a la acción de la temperatura para las barras estandart del sistema básico, en el caso de calentamiento irregular, construidos por el método de fuerzas. Señalamos que la zona traccionada, en el caso de flexión, se dispone por el lado donde la incrementación de la temperatura es menor.

Los momentos flectores serán:
para la barra con los extremos empotrados:

$$M_t = \beta \frac{t_2 - t_1}{h} EJ \text{ (constante a lo largo de la barra);} \qquad (18.33)$$

para la barra con un extremo empotrado y el otro con apoyo articulado en el lugar del empotramiento:

$$M_t = \frac{2}{3} \beta \frac{t_2 - t_1}{h} EJ, \qquad (18.34)$$

donde h es la altura de la sección.

Además de los momentos flectores M_t debidos al calentamiento irregular de las barras, surgen momentos flectores debidos al calentamiento uniforme de las mismas, dado que este calentamiento origina, en el sistema básico, desplazamientos progresivos de sus nudos, por consiguiente, flexión en las barras. Es fácil convencerse de esto examinando cualquier sistema básico (fig. 400). El vínculo de movimiento progresivo introducido en el primer nudo, en el caso de alargamiento térmico de la barra $a - 1$, sólo obstaculiza su desplazamiento horizontal y no el vertical. Por eso, el nudo *1* ocupará la nueva posición *1'*. A consecuencia del alargamiento de otras

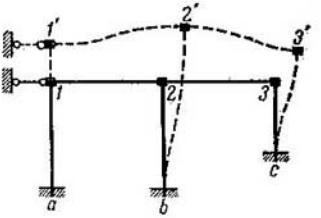


Fig. 400

barras, los nudos *2* y *3* ocuparán, también, las nuevas posiciones *2'* y *3'* en las cuales, en el caso general, las barras del sistema se curvarán (fig. 400), surgiendo en ellas momentos flectores.

Esto significa que, en el sistema básico, el diagrama de M_t originado por la temperatura estará compuesto de dos partes: la del diagrama de M_t' debido al calentamiento irregular y la del diagrama de M_t'' debido al calentamiento uniforme.

La construcción del diagrama de M_t' debido al calentamiento irregular, se efectúa en base a las fórmulas (18.33)—(18.34). La construcción del diagrama de M_t'' debido al calentamiento uniforme, es más complicada.

Para su construcción es necesario conocer los desplazamientos de temperatura de los nudos del sistema básico, por medio de los cuales se pueden expresar los desplazamientos Δ_t de los extremos de cada barra en dirección perpendicular a su eje. Con tal dislocación, el diagrama de momentos flectores a lo largo de las barras empotradas en los dos extremos, representa un trapecio equilátero retorcido (fig. 401), como para un desplazamiento unitario de los extremos de la barra, cuyos momentos en los extremos son

$$M_t'' = \frac{6EJ}{2}\Delta_t, \tag{18.35}$$

y, el diagrama para las barras con un extremo empotrado y el otro sobre un apoyo articulado representa un triángulo, cuya ordenada en el empotramiento, es

$$M_t'' = \frac{3EJ}{l^2}\Delta_t. \tag{18.36}$$

Los desplazamientos de los nudos del sistema básico debidos al calentamiento uniforme se pueden obtener de la siguiente construcción (fig. 402, *a*).

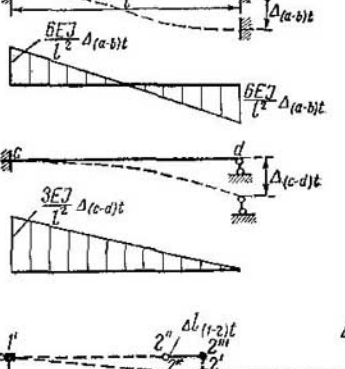


Fig. 401

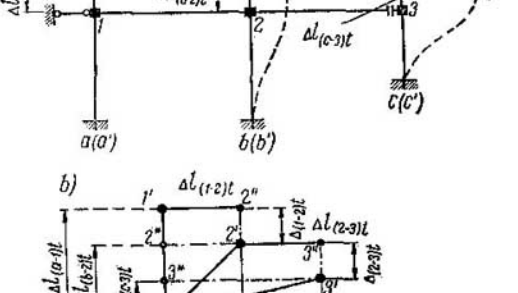
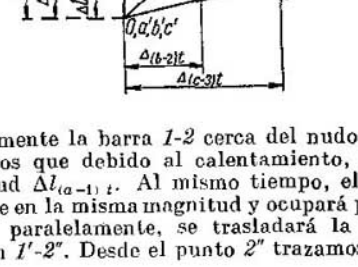


Fig. 402



Seccionamos mentalmente la barra *1-2* cerca del nudo *1* y la *1-3* cerca del *3*. Supongamos que debido al calentamiento, la barra *1* se alargó en la magnitud $\Delta l_{(a-1)\,t}$. Al mismo tiempo, el nudo *1* se desplazará verticalmente en la misma magnitud y ocupará posición *1'*. Junto con el nudo *1*, paralelamente, se trasladará la barra *1-2*. Ella ocupará la posición *1'-2''*. Desde el punto *2''* trazamos el alarga-

miento de temperatura $\Delta l_{(1-2)t}$ de la barra *1-2*, obteniendo el punto *2'''*.

Dejemos, por ahora, la barra 1-*a* y examinemos la *b*-2. A consecuencia de su alargamiento, el extremo *2* se elevará en la magnitud del alargamiento $\Delta l_{(b-2)t}$ y ocupará la posición 2*. De esta manera, para los cortes imaginarios, los extremos de las barras *1-2* y *b-2* concurrentes en el punto 2, ocuparon dos posiciones distintas, la *2'''* y *2**, lo cual es imposible. A estos extremos de las barras, en distintas posiciones, es necesario juntarlos, lo cual puede ser efectuado flexionando las barras. Por cuanto los alargamientos térmicos de las barras son pequeños en comparación con sus longitudes, entonces, el movimiento de los extremos de las barras puede ser examinado como su desplazamiento por las direcciones perpendiculares a los ejes de las barras. La posición verdadera *2'* del punto *2* estará en el punto de intersección de las perpendiculares a las barras *1'-2'''* y *b-2** trazadas desde los puntos *2'''* y *2**.

Señalemos que tal coincidencia tiene lugar sin el giro de los nudos, impedido por los vínculos de momento del sistema básico.

Ahora examinemos las barras *2-3* y *c-3*. La *2-3*, en el caso de coincidencia de los extremos de las barras *1-2* y *b-2* y la existencia del seccionado mental en el nudo *3*, ocupará la posición *2'-3'''*. Desde el punto *3'''* trazamos el alargamiento $\Delta l_{(2-3)t}$ de esta barra y obtenemos el punto *3'''*. El extremo *c* de la barra *c-3*, como empotrado, permanece en su sitio, pero, el *3*, a consecuencia de la dilatación de la barra, para la existencia del seccionado mental, se elevará en la magnitud de este alargamiento $\Delta l_{(c-3)t}$ y ocupará la posición *3**. La coincidencia de los extremos de las barras que resultaron en distintos lugares, la efectuamos por las perpendiculares a los ejes de las mismas, trazadas desde los puntos *3'''* y *3**. La posición verdadera *3'* del nudo *3* se encontrará en la intersección de estas perpendiculares.

Ahora se puede representar el estado deformado del sistema básico (fig. 402, *a*) y expresar los desplazamientos térmicos relativos buscados de los extremos de las barras (deslizamientos):

$$\Delta_{(a-1)t} = 0;$$
$$\Delta_{(1-2)t} = \Delta l_{(a-1)t} - \Delta l_{(b-2)t};$$
$$\Delta_{(b-2)t} = \Delta l_{(1-2)t};$$
$$\Delta_{(c-3)t} = \Delta l_{(b-2)t} - \Delta l_{(c-3)t};$$
$$\Delta_{(c-3)t} = \Delta l_{(1-2)t} + \Delta l_{(2-3)t}.$$

Los alargamientos térmicos de las barras debidos al calentamiento uniforme se determinan por la expresión (11-20), los cuales pueden ser presentados en la siguiente forma:

$$\Delta l_{(a-b)t} = \beta l_{ab} \frac{1}{h} (t_1 h_2 + t_2 h_1). \qquad (18.37)$$

Por cuanto los alargamientos térmicos de los elementos son pequeños, entonces, en el esquema del pórtico deben ser trazados en una escala más grande que la de las barras del sistema. Comúnmente, en este caso, se construye un diagrama polar de desplazamientos especial, en el cual se trazan sólo los alargamientos de las barras. Este diagrama se construye así.

Desde el polo O, con el que coinciden en el diagrama las posiciones de todos los puntos fijos del sistema (los *a*, *b* y *c*) (fig. 402, *b*), se traza verticalmente, en una escala más cómoda, el valor del alargamiento $\Delta l_{(a-1)t}$ de la barra *a-1* y se obtiene el punto *1'*, el cual con su posición respecto al polo O determina el desplazamiento de este nudo del sistema básico. Luego, desde el punto *1'* se traza el alargamiento $\Delta l_{(1-2)t}$ de la barra *1-2*, por su dirección, obteniendo el punto *2''*, de donde levantamos la perpendicular al alargamiento trazado. Sobre esta perpendicular deberá hallarse el punto *2'* que determina la posición de este nudo. Trazando desde el punto *b*, coincidente con el polo O, el vector de alargamiento $\Delta l_{(b-2)t}$ de la barra *b-2*, obtenemos el punto *2**, desde el cual, igualmente, trazamos la perpendicular al alargamiento que acabamos de trazar. La intersección de ésta con la perpendicular trazada anteriormente desde el punto *2''* determina la posición del nudo *2'*. El desplazamiento total del nudo se determina con el vector que tiene su origen en el polo O y su extremo en el punto *2'*. Desde el punto *2'* trazamos el alargamiento $\Delta l_{(2-3)t}$ de la barra *2-3* y, desde el punto obtenido *3''*, levantamos la perpendicular al alargamiento trazado. Luego, desde el punto *c*, que coincide con el polo O, trazamos el alargamiento $\Delta l_{(c-3)t}$ de la barra *c-3* y, desde el nuevo punto *3**, trazamos la perpendicular a él. La intersección de las dos perpendiculares determina en el diagrama la posición del punto *3'*. El diagrama ha sido construido.

De esta manera:

1) los desplazamientos del nudo del sistema básico en el diagrama polar de desplazamientos se determinan con los vectores trazados desde el polo O hasta el punto que representa al nudo dado;

2) los desplazamientos relativos de los extremos de las barras se determinan con los vectores que unen la imagen de estos en el diagrama. La proyección de este vector, sobre el eje perpendicular al eje de la barra, determina el desplazamiento relativo buscado de los extremos de la barra por la dirección perpendicular a ella o, de otro modo, la dislocación.

Por ejemplo, el desplazamiento total del nudo 3 en el diagrama, se representa con el vector *0-3'*. El desplazamiento relativo de los extremos de la barra *2-3* se determina con el vector *2'-3'*, el cual muestra que el extremo *2* de la barra, con respecto al *3*, se eleva. La proyección del desplazamiento relativo completo *2'-3'* sobre el eje perpendicular a la barra *2-3* es la dislocación $\Delta_{(2-3)t}$ de este elemento. El signo de la dislocación se determina por la dirección de giro de la cuerda de la barra. Si ella gira en sentido de las agujas

del reloj, es decir, si el extremo derecho desciende con respecto al izquierdo, entonces, la dislocación es positiva y al contrario. El desplazamiento para la barra *2-3* es positivo, dado que el nudo *3* desciende con respecto al *2*. Así pueden ser determinados todos los desplazamientos de los extremos de las barras. No es difícil convencerse de que sus valores coinciden con los determinados anteriormente sobre el esquema del pórtico.

Después de determinar los desplazamientos de los extremos de las barras, el diagrama $M_t^{\prime\prime}$ se construye por las expresiones (18.35)

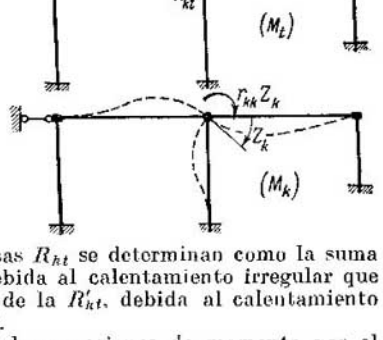


Fig. 403

y (18.36). Las reacciones térmicas R_{kt} se determinan como la suma de dos reacciones: de la R'_{kt}, debida al calentamiento irregular que da lugar al diagrama de M'_t, y de la R''_{kt}, debida al calentamiento uniforme que da lugar al de M''_t.

Lo más fácil es determinar las reacciones de momento por el equilibrio de los nudos recortados en los dos diagramas indicados de M'_t y M''_t.

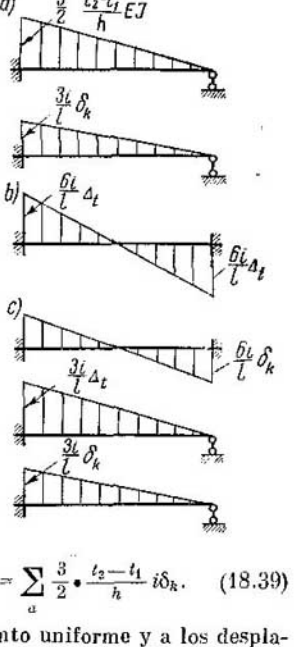
Cuando las barras (montantes) seccionadas son paralelas, las reacciones de fuerza pueden ser determinadas del equilibrio de las vigas horizontales seccionadas en los diagramas de M'_t y M''_t. Para estas mismas reacciones, en este caso y en otros más complicados, pueden ser determinadas con la multiplicación de diagramas. Mostremos esto.

Examinemos el trabajo posible de las fuerzas del sistema básico en el desplazamiento debido a $Z_k = 1$ (fig. 403), en el caso de acción de la temperatura:

$$R_{kt}Z_k = \sum \int M_t \frac{M_k}{EJ}\, ds; \quad R_{kt} = \sum \int M_t \frac{\overline{M}_k}{EJ}\, ds = (\boldsymbol{M}_t)\cdot(\overline{\boldsymbol{M}}_k). \tag{18.38}$$

Al determinar las reacciones de fuerza es necesario multiplicar los diagramas de temperatura por los debidos a los desplazamientos progresivos. Los diagramas unitarios debidos a los desplazamientos progresivos en las barras con los dos extremos empotrados son trapecios retorcidos y, los debidos a calentamiento irregular, son rectángulos. El resultado de la multiplicación de tales diagramas es igual a

Fig. 404



cero. Los diagramas en las barras con un extremo empotrado, son triangulares en ambos casos y los resultados de su multiplicación ya no son iguales a cero. Por consiguiente, al multiplicar el primer diagrama de M'_t debido a un calentamiento irregular por el debido a un desplazamiento progresivo unitario, es necesario multiplicar sólo sus partes a lo largo de las barras que, en el sistema básico, *tienen empotrado un solo extremo*, si existen tales barras. El resultado de la multiplicación se puede presentar en la siguiente forma (fig. 404, *a*):

$$R'_{kt} = (\boldsymbol{M}'_t) \cdot \overline{\boldsymbol{M}}_k) =$$

$$= \sum_a \frac{3}{2} \cdot \frac{t_2 - t_1}{h} EJ \, \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3i}{l} \delta_k \, \frac{1}{EJ} = \sum_a \frac{3}{2} \cdot \frac{t_2 - t_1}{h} i\delta_k. \quad (18.39)$$

Los diagramas debidos al calentamiento uniforme y a los desplazamientos progresivos unitarios de los nudos tienen idéntica configuración (fig. 404, *b*, *c*).

Multiplicándolos, obtenemos que:

$$R''_{kt} = \sum_e \frac{12i}{l^2} \Delta_t \delta_k + \sum_a \frac{3i}{l^2} \Delta_t \delta_k, \quad (18.40)$$

donde Δ_t y δ_k son los desplazamientos térmicos y unitarios de los extremos de las barras en el sistema básico.

El diagrama térmico de momentos se determina por la expresión

$$(\boldsymbol{M}_t) = (\overline{\boldsymbol{M}}_1) Z_1 + (\overline{\boldsymbol{M}}_2) Z_2 + \ldots + (\boldsymbol{M}_n) Z_n + (\boldsymbol{M}'_t) + (\boldsymbol{M}''_t). \quad (18.41)$$

Sus verificaciones son las usuales. Paralelamente a ellas, es posible efectuar la verificación multiplicando este diagrama por cualquier otro unitario o unitario total del método de desplazamientos.

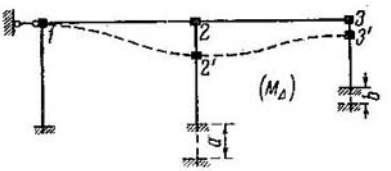
$$(\boldsymbol{M}_t)(\overline{\boldsymbol{M}}_s) = 0. \quad (18.42)$$

Al calcular la dislocación de los apoyos, las ecuaciones canónicas tienen la forma:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \ldots + r_{kn}Z_n + R_{k\Delta} = 0. \qquad (18.43)$$

Para la determinación de $R_{k\Delta}$ es necesario conocer el diagrama de los momentos flectores M^0_Δ en el sistema básico, debido a la dislocación dada Δ de los apoyos. Tal diagrama es fácil de construir si son determinados los desplazamientos progresivos relativos de los extremos de las barras en el sistema básico, por la dirección perpendicular a estas barras (deslizamientos), para los desplazamientos

Fig. 405



fijados de los apoyos (fig. 405). Estos desplazamientos se hallan del mismo modo que para un calentamiento uniforme, sólo que, en este caso, todas las $\Delta l = 0$.

En particular, para esto, puede ser construido el diagrama polar de desplazamientos (véase la fig. 402).

La posibilidad de determinación de las reacciones $R_{k\Delta}$ por medio de la multiplicación de diagramas, se demuestra como para la acción de la temperatura.

Las reacciones de momento deben determinarse del equilibrio del nudo recortado y, las de fuerza, del equilibrio de la parte seccionada o con la multiplicación de diagramas, donde esto es posible. Por cuanto en las barras del sistema básico, los diagramas debidos a las dislocaciones de los apoyos serán por la forma, los mismos que los debidos a los desplazamientos unitarios progresivos, entonces, el resultado de la multiplicación, al determinar las reacciones de fuerza, puede ser presentado en la forma siguiente.

$$R_{k\Delta} = \sum_c \frac{12i}{l^2}\Delta_\Delta\delta_k + \sum_a \frac{3i}{l^2}\Delta_\Delta\delta_k, \qquad (18.44)$$

donde Δ_Δ y δ_k son los desplazamientos de los extremos de las barras en el sistema básico (dislocaciones), debidos al deslizamiento de los apoyos y al desplazamiento unitario progresivo.

El diagrama de momentos flectores debido al deslizamiento de los apoyos se determina por la expresión

$$(M_\Delta) = (\overline{M}_1)Z_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + \ldots + (\overline{M}_n)Z_n + (M^0_\Delta). \qquad (18.45)$$

Su verificación se efectúa análogamente a la del diagrama de temperatura.

§ 201. INTERPRETACION ESTATICA DE LA RESOLUCION DE LAS ECUACIONES CANONICAS POR EL METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS. La resolución de las ecuaciones (18.2) en primera aproximación, al utilizar los valores hallados de las incógnitas anteriores para determinar las sucesivas de acuerdo

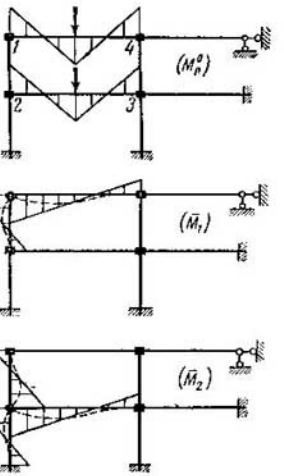


Fig. 406

con (14.61), la presentamos en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} Z_1^* &= -\frac{R_{1P}}{r_{11}}; \\ Z_2^* &= -\frac{1}{r_{22}}(R_{2P}+r_{21}Z_1^*); \\ Z_3^* &= -\frac{1}{r_{33}}(R_{3P}+r_{31}Z_1^*+r_{32}Z_2^*), \end{aligned}\right\} \qquad (18.46)$$

etc.

Estas expresiones pueden ser obtenidas por consideraciones estáticas. Efectuamos el razonamiento sobre el ejemplo de un pórtico, para el cual el sistema básico y algunos diagramas indispensables se exponen en la fig. 406. Al principio buscaremos Z_1, pero no para el sistema dado, sino para el formado del básico con la eliminación del primer vínculo. Entonces, habrá una sóla ecuación canónica

$$r_{11}Z_1' + R_{1P} = 0,$$

de donde obtenemos

$$Z_1' = -\frac{R_{1P}}{r_{11}}.$$

Esto es la primera aproximación Z_1^*.

Luego componemos el nuevo diagrama de carga de M_P' de la forma siguiente:

$$(M_P') = (M_P^0) + (\bar{M}_1)\, Z_1^*.$$

Su empleo en el cálculo ulterior corresponde a la colocación de la primera aproximación Z_1^* en todas las demás ecuaciones canónicas. Efectivamente, la complementación a los términos independientes R_{kP} de las ecuaciones sucesivas es igual a

$$\Delta R_{kP}' = (\bar{M}_k)\cdot(\bar{M}_1)\, Z_1' = r_{k1}Z_1' = r_{k1}Z_1^*.$$

Ahora, introduzcamos de nuevo el primer vínculo en el sistema y examinemos el sistema formado del básico al eliminar el segundo vínculo y determinemos para este sistema Z_2'. La ecuación canónica será

$$r_{22}Z_2' + R_{2P}' = 0, \text{ de donde } Z_2' = -\frac{R_{2P}'}{r_{22}} =$$

$$= -\frac{1}{r_{22}}(R_{2P} + \Delta R_{2P}') = -\frac{1}{r_{22}}(R_{2P} + R_{21}Z_1').$$

Tal operación corresponde a la determinación de la primera aproximación Z_2^*.

Ahora componemos el nuevo diagrama de carga $M_P'^*$ de la forma siguiente:

$$(M_P'^*) = (M_P') + (\overline{M}_2)\, Z_2' = (M_P') + (\overline{M}_1)\, Z_1' + (\overline{M}_2)\, Z_2'.$$

Su ulterior empleo en el cálculo corresponde a la sustitución de Z_2^* en todas las ecuaciones restantes al resolverlas por el método de aproximaciones sucesivas. Efectivamente, el nuevo complemento a R_{kP} es igual a:

$$\Delta R_{kP}' = (\overline{M}_k) \cdot (\overline{M}_2)\, Z_2' = r_{k2}Z_2' = r_{k2}Z_2^*.$$

Introducimos de nuevo el segundo vínculo y examinamos el sistema formado del básico con la eliminación del tercer vínculo. La ecuación canónica será

$$r_{33}Z_3' + R_{3P}'' = 0, \text{ de donde } Z_3' = -\frac{R_{3P}''}{r_{33}} =$$

$$= -\frac{1}{r_{33}}(R_{3P} + r_{31}Z_1' + r_{32}Z_2').$$

Esta operación coresponde a la determinación de la primera aproximación Z_3^* en el curso de la resolución de las ecuaciones. Y así sucesivamente.

El método de cálculo, llamado de equilibrio de los nudos o de distribución de los momentos flectores, se basa, precisamente, en tales operaciones. En la práctica, este procedimiento se efectúa, comúnmente, por medio de la escritura de los momentos complementarios $\Delta M'$ en los extremos de la barra del pórtico, sin construir los diagramas intermedios de carga. Para mayor comodidad de tal escritura el pórtico se representa en escala grande, para que en los extremos de las barras sea posible anotar libremente los valores de los momentos complementarios.

Como fue mostrado, el método de equilibrio de los nudos es sólo una interpretación estática de resolución de ecuaciones canónicas del método de desplazamientos por el procedimiento de aproximaciones sucesivas y, en comparación con este último no posee ninguna ventaja. Además, el error cometido en la resolución de las ecuaciones por el procedimiento de aproximaciones sucesivas, al cuadrar el proceso, se extingue gradualmente, sólo se alarga el procedimiento

de aproximaciones cuando el error cometido en la escritura de los momentos complementarios es difícil de descubrir.

De paso señalamos que la interpretación estática de la resolución de las ecuaciones del método de desplazamientos por el procedimiento de Gaussia, se reduce al empleo de varios sistemas básicos con la eliminación sucesiva de los vínculos introducidos en el sistema. Los pormenores se exponen en [1], pág. 272.

§ 202. SIMPLIFICACIONES EN EL METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Las posibles simplificaciones en el método de desplazamientos se reducen a lo siguiente.

1. Se emplean elementos complejos estandart del sistema básico, los cuales pueden ser previamente calculados, en la forma general, a la acción de la carga y los desplazamientos, por ejemplo, los pórticos representados en la fig. 407, *a*, *b*. Estos pórticos deberán

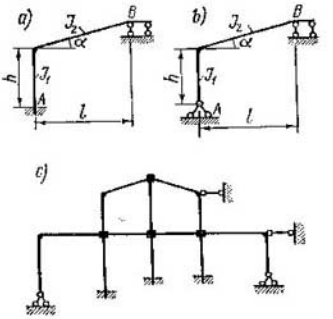


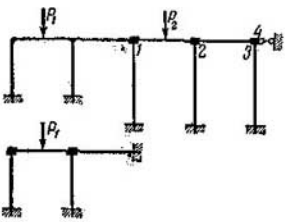
Fig. 407

ser previamente calculados a la carga, a los desplazamientos unitarios angulares de sus extremos empotrados y a los desplazamientos progresivos relativos por las horizontales de los puntos *A* y *B*. La introducción de tales elementos en el sistema básico (fig. 407, *c*) disminuye el número de incógnitas básicas.

2. Se emplean sistemas básicos con el número incompleto de los vínculos introducidos, lo que también disminuye la cantidad de incógnitas básicas, pero, requiere análisis complementarios por el método de fuerzas o el de desplazamientos de los elementos no estandart contenidos en el sistema básico, bajo la carga y los desplazamientos del nudo por el que entra en contacto con la parte restante del sistema (fig. 408). En este caso, la resolución de las ecuaciones canónicas con un número completo de incógnitas, siendo el sistema básico con elementos simples, se sustituye por la resolución de dos sistemas de ecuaciones independientes: uno, al investigar el elemento no estandart y el otro, correspondiente al sistema básico con el número de vínculos incompleto.

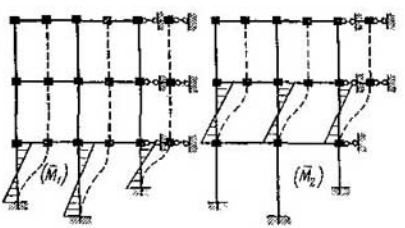
3. En calidad de incógnitas se toman los desplazamientos en grupo, en forma análoga a como se hace en el método de fuerzas, empleando fuerzas incógnitas en grupo.

Fig. 408



Los desplazamientos progresivos en grupo de los nudos merecen particular atención al calcular pórticos de muchos pisos (fig. 409). Con tales desplazamientos, ciertas reacciones de fuerza secundarias, como por ejemplo, las r_{12}, son iguales a cero, lo que no es difícil de fundamentar si, para la determinación de r_{12}, empleamos la multiplicación de diagramas.

Fig. 409



Señalamos que, como en el método de fuerzas, empleando la resolución de ecuaciones canónicas por el procedimiento de Gaussia se pueden construir diagramas unitarios ortogonales, correspondientes a algunos desplazamientos en grupo.

CAPITULO XIX * CALCULO DE SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS POR LOS METODOS MIXTO Y COMBINADO

§ 203. COMPARACION DE LOS METODOS DE FUERZAS Y DE DESPLAZAMIENTOS Y ELECCION DEL METODO DE CALCULO. La comparación del método de fuerzas con el de desplazamientos muestra que tienen tanto semejanzas como diferencias.

1. En ambos métodos, el cálculo se efectúa empleando el sistema básico. Sin embargo, los sistemas básicos de estos métodos son diferentes: en el método de fuerzas, el sistema básico se obtiene excluyendo vínculos del sistema dado, lo que disminuye su grado de indeterminación estática y, en el de desplazamientos, al revés, agregando vínculos complementarios, lo que aumenta su grado de indeterminación estática.

2. En ambos métodos se examinan incógnitas básicas: en el de fuerzas, las reacciones de los vínculos eliminados $X_1, \ldots, X_n$ y, en el de desplazamientos, los desplazamientos por la dirección de los vínculos introducidos $Z_1, \ldots, Z_n$.

3. En ambos métodos se componen ecuaciones canónicas idénticas por su forma pero diferentes por su contenido. En el método de fuerzas, las ecuaciones canónicas contienen las fuerzas $X_1, \ldots, X_n$, que destruyen los desplazamientos en el sistema básico por la dirección de los vínculos eliminados, por cuanto estos desplazamientos no existen en el sistema dado. En el método de desplazamientos ellas contienen los desplazamientos $Z_1, \ldots, Z_n$, que destruyen las reacciones de los vínculos introducidos en el sistema básico, que no existen en el sistema dado.

4. En ambos métodos se emplean diagramas unitarios. Sin embargo, en el de fuerzas, los diagramas unitarios se construyen por las fuerzas y, en el de desplazamientos, por los desplazamientos.

5. En ambos métodos, para construir el diagrama definitivo de momentos flectores se emplea el mismo principio.

Podríamos seguir comparando.

Naturalmente, surge la pregunta, cuál de los métodos y en qué casos resulta más cómodo para el cálculo.

Analizando las operaciones de cálculo de ambos métodos se puede señalar que, en el de desplazamientos, ellas son considerablemente más simples que en el de fuerzas. En el método de desplazamientos, el sistema básico, de hecho, es único, mientras que en el de fuerzas, pueden haber varios. En el método de desplazamientos, los diagramas unitarios y de carga son simples y siempre estandart y, en el de fuerzas, pueden ser complejos. En el método de desplazamientos, en muchos casos, el cálculo de los coeficientes y términos libres de las ecuaciones canónicas es considerablemente más simple que en el de fuerzas. Para una gran cantidad de incógnitas, las ecuaciones canónicas en el método de desplazamientos, son ecuaciones incompletas, en el de fuerzas, son necesarios procedimientos especiales para conseguir esto. En muchos casos, el número de incógnitas en el método de desplazamientos es menor.

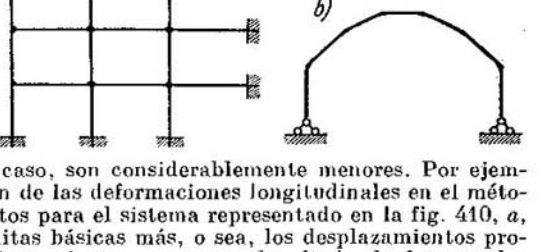
De esta manera, en muchos casos, (pero no en todos), el método de desplazamientos es más cómodo que el de fuerzas. Sin embargo, a pesar de las ventajas enumeradas, este método no puede sustituir por completo al método de fuerzas.

En primer lugar, porque en unos sistemas, el cálculo es más cómodo por el método de desplazamientos y, en otros, por el de fuerzas.

Por ejemplo, para calcular el sistema representado en la fig. 410, *a*, que por el método de desplazamientos posee 9 incógnitas básicas, y por el de fuerzas 27, es más cómodo el método de desplazamientos, pero, para el sistema representado en la fig, 410, *b* que, por el método de fuerzas posee una incógnita básica y por el de desplazamientos 11, es más cómodo el método de fuerzas.

En segundo lugar, si el cálculo se efectúa considerando las deformaciones de las barras, debidas a las fuerzas longitudinales y transversales, el método de desplazamientos se hace muy complicado y pierde sus ventajas, mientras que, las complicaciones en el método

Fig. 410



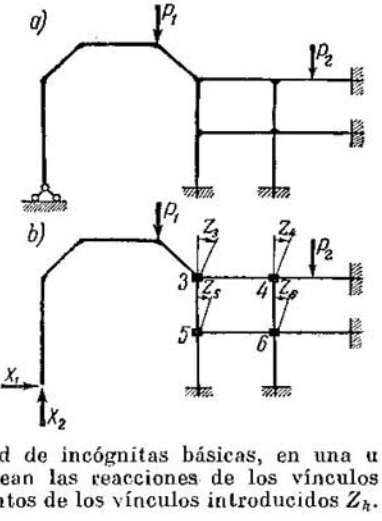
de fuerzas, en este caso, son considerablemente menores. Por ejemplo, la consideración de las deformaciones longitudinales en el método de desplazamientos para el sistema representado en la fig. 410, *a*, introduce 18 incógnitas básicas más, o sea, los desplazamientos progresivos de los nudos, mientras que, en el método de fuerzas, las complicaciones complementarias sólo están ligadas con la construcción de los diagramas de carga y unitarios de N y Q con el cálculo de los desplazamientos debidos a estos. En el método de fuerzas, la cantidad de incógnitas debidas a la consideración de las deformaciones originadas por N y Q, no varía, mientras que, en el de desplazamientos, aumenta considerablemente.

En tercer lugar, durante el cálculo de armaduras articuladas, donde se consideran las deformaciones longitudinales, el número de incógnitas básicas siempre es mayor por el método de desplazamientos que por el de fuerzas.

Por fin, los elementos del sistema básico del método de desplazamientos son hiperestáticos y, para construir en ellos, en una u otra forma, los diagramas de los momentos flectores debidos a los diferentes desplazamientos y a la carga, se emplea el método de fuerzas. Por consiguiente, cada método posee su campo de aplicación.

La elección del método de cálculo se determina, ante todo, por el número de incógnitas básicas. Está claro, que la elección será efectuada a favor del que tenga menor número de ellas. Sin embargo, teniendo en cuenta que en el cálculo por el método de desplazamientos, muchas operaciones son más simples que por el de fuerzas, hay razón para recomendar el método de desplazamientos, en aquellos casos, cuando el número de incógnitas básicas sea un poco mayor que por el método de fuerzas.

Fig. 411



Pero, si el sistema es cómodo en una de sus partes, por ejemplo, en la izquierda (fig. 411, *a*), para el cálculo por el método de fuerzas y en la otra, la derecha, por el de desplazamientos, entonces, surge un interrogante. ¿No se podrían utilizar ambos métodos para disminuir el número de incógnitas básicas? Esto es posible empleando el método mixto o el combinado.

En estos métodos, en calidad de incógnitas básicas, en una u otra etapa del cálculo, se emplean las reacciones de los vínculos eliminados X_k y los desplazamientos de los vínculos introducidos Z_k.

§ 204. METODO MIXTO. En el método mixto (de A. A. Gvozdiov), el sistema básico se forma eliminando los vínculos, como en el método de fuerzas, en la parte del sistema cómodo para el cálculo por el método de fuerzas, e introduciendo vínculos, como en el método de desplazamientos, en la parte cómoda para el cálculo por el método de desplazamientos (fig. 411, *b*). Las incógnitas básicas son: las reacciones X_k de los vínculos eliminados y los desplazamientos Z_k de los agregados.

En el método mixto habrán dos tipos de ecuaciones canónicas. Los sumandos de la ecuación de uno de los tipos son los desplazamientos por la dirección de los vínculos eliminados, como en el método de fuerzas y, los sumandos de las ecuaciones del otro, las reacciones de los vínculos agregados, como en el método de desplazamientos.

El número de ecuaciones canónicas del primer tipo es igual al número de vínculos *eliminados* al formar el sistema básico y, el número de ecuaciones canónicas del segundo tipo, al de vínculos *agregados*.

En las ecuaciones canónicas de ambos tipos entran las siguientes incógnitas básicas: las fuerzas X_k y los desplazamientos Z_k. Conforme al sistema representado en la fig. 411, *b*, las ecuaciones canónicas tienen la forma:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\dot{\delta}_{13}Z_3+\dot{\delta}_{14}Z_4+\dot{\delta}_{15}Z_5+\dot{\delta}_{16}Z_6+\Delta_{1P}=0;\\ r_{31}X_1+r_{32}X_2+r_{33}Z_3+r_{34}Z_4+r_{35}Z_5+r_{36}Z_6+R_{3P}=0. \end{aligned}\right\} \quad (19.1)$$

Las ecuaciones canónicas del primer tipo contienen los desplazamientos unitarios debidos no sólo a las fuerzas, sino, también, a los desplazamientos unitarios de los vínculos introducidos ($\dot{\delta}$) y, las ecuaciones canónicas del segundo tipo, contienen las reacciones unitarias debidas no sólo a los desplazamientos unitarios de los vínculos sino, también, a las fuerzas unitarias ($\dot{r}$). Por ejemplo, $\dot{\delta}_{13}$ es el desplazamiento por la dirección de la fuerza X_1 debido al desplazamiento $Z_3 = 1$, y $\dot{r}_{31}$ es la reacción en el vínculo 3 debida a la fuerza $X_1 = 1$. Sobre la base del teorema de reciprocidad, las reacciones unitarias debidas a las fuerzas y los desplazamientos debidos a los desplazamientos de los vínculos están ligados por una dependencia [véase (11.36)].

$$\dot{\delta}_{km} = -\dot{r}_{km}. \tag{19.2}$$

Los desplazamientos debidos a las fuerzas y las reacciones debidas a los desplazamientos se determinan por las normas usuales, expuestas en el método de fuerzas y en el de desplazamientos.

El desplazamiento $\dot{\delta}_{km}$ debido al desplazamiento de los vínculos introducidos se determina a base de simples consideraciones geométricas o por la fórmula (14.25). Como se sabe, si cualquier parte libre de un sistema básico gira en cierto ángulo sin deformarse, (fig. 412, *d*), el desplazamiento angular en cualquier lugar de esta parte es igual al ángulo de giro dado y, el desplazamiento progresivo, es igual a la longitud de la perpendicular bajada desde el centro de rotación sobre la dirección del desplazamiento buscado, multiplicada por el ángulo de giro. Para un desplazamiento progresivo, en muchos casos, las consideraciones geométricas se hacen completamente simples.

Las reacciones $\dot{r}_{km}$ debidas a las fuerzas se determinan, como en el método de desplazamientos, de las condiciones de equilibrio.

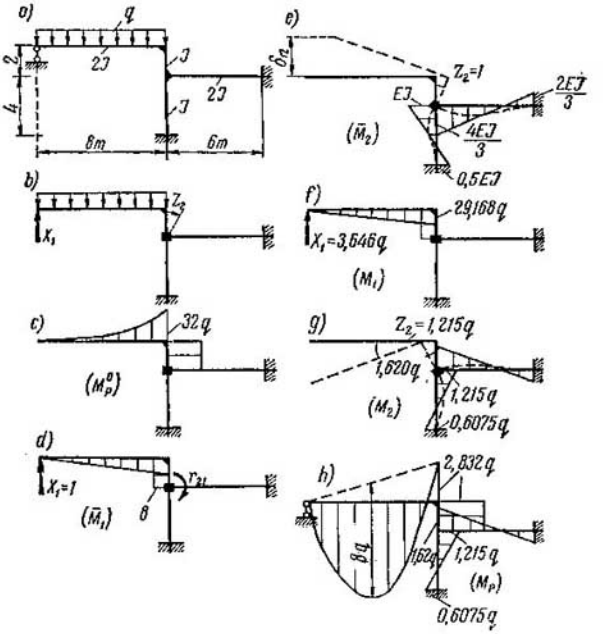
En virtud del teorema de reciprocidad (19.2), los desplazamientos $\dot{\delta}_{km}$, debidos al desplazamiento de los vínculos, se pueden determinar como una reacción recíproca $\dot{r}_{km}$ debida a las fuerzas, la cual se calcula simplemente.

Los términos de carga Δ_{kP} y R_{kP} se determinan del mismo modo que en el método de fuerzas y de desplazamientos. El diagrama definitivo de los momentos flectores se compone por la expresión

$$(M_P) = (\overline{M}_1) X_1 + (\overline{M}_2) X_2 + (\overline{M}_3) Z_3 + (\overline{M}_4) Z_4 + \\ + (\overline{M}_5) Z_5 + (\overline{M}_6) Z_6 + (M_P^0). \tag{19.3}$$

La verificación del diagrama definitivo se efectúa así, como fue señalado para estos métodos: los *desplazamientos* por la dirección de los vínculos eliminados y las reacciones de los vínculos agregados deberán ser iguales a cero.

Fig. 412



Ejemplo 52. Construir el diagrama de momentos flectores por el método mixto (fig. 412, *a*). El sistema básico y el diagrama de momentos flectores, en él, debidos a la carga, se muestran en la fig. 412, *b*, *c*. Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}Z_2+\Delta_{1P}=0;$$

$$r_{21}X_1+r_{22}Z_2+R_{2P}=0.$$

Los diagramas unitarios se muestran en la fig. 412, *d*, *e*. Los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas son:
por la multiplicación de los diagramas

$$\delta_{11}=\frac{8\cdot 8}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{E\cdot 2J}+\frac{8\cdot 2\cdot 8}{EJ}=\frac{640}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{3}\cdot 32q\cdot 8\cdot\frac{3}{4}\cdot 8\frac{1}{E\cdot 2J}-32q\,\frac{2\cdot 8}{EJ}=-\frac{768q}{EJ};$$

por el equilibrio del nudo recortado

$$r_{22}=\frac{4}{3}EJ+EJ=\frac{7EJ}{3};\quad r_{21}=-8=-\delta_{12}.$$

Las ecuaciones canónicas con los coeficientes numéricos son:

$$\frac{640}{3EJ} X_1 + 8Z_2 - \frac{768}{EJ} = 0;$$

$$-8X_1 + \frac{7}{3} EJ \cdot Z_2 + 32q = 0,$$

de donde obtenemos que $X_1 = 3.646q$ y $Z_2 = 1{,}215q$.

Los diagramas unitarios corregidos y los definitivos de los momentos flectores se muestran en la fig. 412, *f*, *g*, *h*.

§ 205. METODO COMBINADO. Llamaremos combinado al método de cálculo de los sistemas hiperestáticos, en el cual, el sistema básico se elige por uno de los siguientes métodos: por el de fuerzas, eliminando una parte de los vínculos superfluos o por el de desplazamientos, agregando una parte del número de vínculos y, la determinación en el sistema básico de las fuerzas internas debidas a la carga y las influencias unitarias, se efectúa por otro método. Por consiguiente, en el método combinado, el sistema básico elegido por el método de fuerzas, es hiperestático y, el elegido por el método de desplazamientos, contiene elementos que no son estandart. En el caso, cuando el sistema básico se elige por el método de fuerzas, el cálculo de su parte hiperestática se lleva a cabo por el método de desplazamientos y, cuando se elige por el de desplazamientos, el cálculo de los elementos que no son estandart se efectúa por el método de fuerzas.

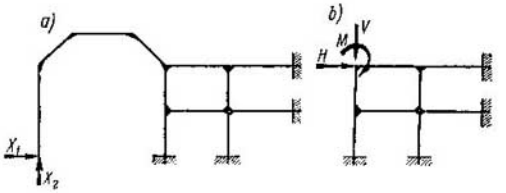
De este modo, en el método combinado, además de las incógnitas básicas correspondientes al sistema básico adoptado, se introducen incógnitas auxiliares durante su estudio preliminar.

Al formar el sistema básico, la eliminación de vínculos por el método de fuerzas y su introducción por el de desplazamiento, es necesario efectuarla en la parte del sistema cómoda de calcular por el método respectivo. En este caso, el número total de incógnitas es igual al número de incógnitas por el método mixto.

En muchos casos, el método combinado es más cómodo que el mixto, dado que en él, las incógnitas básicas están separadas de las auxiliares y las ecuaciones canónicas divididas en dos tipos, los cuales corresponden al método de fuerzas y al de desplazamientos, mientras que, en el método mixto, las ecuaciones canónicas no están divididas.

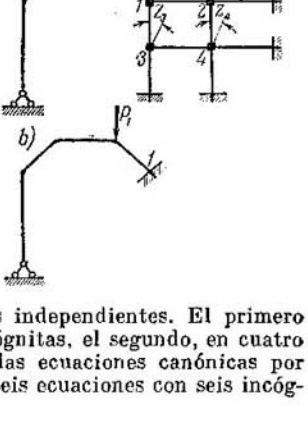
Aclaremos lo dicho sobre el ejemplo del sistema representado en la fig. 411, *a*. Formamos el sistema básico hiperestático por el método de fuerzas (fig. 413, *a*) y el cálculo de su parte hiperestática (fig. 413, *b*) lo efectuamos por el método de desplazamientos. De esta manera, tendremos dos incógnitas básicas, X_1 y X_2 y cuatro auxiliares $Z_1, \ldots, Z_4$. La parte hiperestática del sistema básico deberá ser calculada bajo la acción de las fuerzas V, H y el momento M. Con los resultados de tal cálculo se pueden construir los diagramas de $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ y M_p^0 en el sistema básico.

Fig. 413



Se puede obrar al revés. Elegir el sistema básico por el método de desplazamientos (fig. 414, *a*), y estudiar, previamente, el elemento que no es estandart (fig. 414, *b*), por el método de fuerzas. Tendremos cuatro incógnitas básicas $Z_1, \ldots, Z_4$ y dos auxiliares X_1 y X_2. Para construir los diagramas de $\overline{M}_1$ y M_p^0 en el sistema básico

Fig. 414



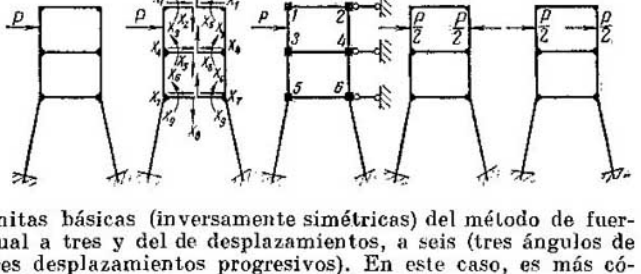
es necesario calcular el elemento que no es estandart bajo la acción de la carga y la rotación del empotramiento. Esta segunda variante del método combinado se p ede considerar como un método de desplazamientos en el que se emplean elementos que no son estandart.

En ambas variantes del método combinado, las ecuaciones canónicas se descomponen en dos sistemas independientes. El primero consiste en dos ecuaciones con dos incógnitas, el segundo, en cuatro con cuatro incógnitas, mientras que las ecuaciones canónicas por el método mixto están compuestas de seis ecuaciones con seis incógnitas.

§ 206. METODO COMBINADO DE CALCULO DE SISTEMAS SIMETRICOS. El método combinado de sistemas simétricos (de I. M. Rabinóvich) consiste en la utilización, por separado, de los métodos de fuerzas y desplazamientos para el cálculo de los sistemas bajo cargas simétricas y de simetría inversa. Al calcular por este método, la carga se divide en simétrica y de simetría inversa. El sistema bajo carga simétrica se calcula por el método de desplazamientos y, bajo la de simetría inversa, por el de fuerzas. En este caso, el número total de incógnitas básicas, resulta a veces menor que al emplear los métodos de fuerzas y desplazamientos por sepa-

rado. Por ejemplo, por el método de fuerzas y de desplazamientos, el número de incógnitas básicas para el pórtico representado en la fig. 415, es igual a nueve. Para carga simétrica, el número de incógnitas (simétricas) básicas del método de fuerzas es igual a seis y el del desplazamientos, a tres. En este caso, es más cómodo el método de desplazamientos. Para carga de simetría inversa, el número

Fig. 415



de incógnitas básicas (inversamente simétricas) del método de fuerzas es igual a tres y del de desplazamientos, a seis (tres ángulos de giro y tres desplazamientos progresivos). En este caso, es más cómodo el método de fuerzas.

CAPITULO XX * METODOS APROXIMADOS Y MECANISMOS PARA CALCULAR SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS

§ 207. FINALIDAD DE LOS METODOS APROXIMADOS. Los métodos aproximados o de aproximación son métodos elaborados sobre diferentes hipótesis complementarias, relacionadas con la elección del esquema de cálculo de la estructura, la distribución de las fuerzas internas, el desprecio de ciertas cargas, la transformación de las cargas y su sustitución por otras más simples y aproximadamente equivalentes.

La finalidad de los métodos de aproximación consiste en simplificar el cálculo conservando una exactitud aceptable para el cálculo preventivo y a veces definitivo de la estructura.

Las ideas de las distintas simplificaciones se sacan del análisis de los resultados del cálculo de las estructuras, efectuados por métodos exactos, así como de los propios métodos precisos.

La simplificación del esquema de cálculo es el procedimiento básico de simplificación. Si el esquema de cálculo se obtiene en base a hipótesis groseras, entonces, el resultado del mismo será, sólo, una primera aproximación, útil, únicamente, para la determinación

preliminar de las secciones, calculándolas ulteriormente por un esquema teórico más preciso.

Por ejemplo, las secciones de las vigas horizontales del pórtico pueden ser halladas con antelación por cierta porción del mayor momento flector M^{viga}, debido a la carga ubicada sobre esta viga, si la suponemos simplemente apoyada. En este caso, corrientemente, se toma:

$M = (0{,}6—0{,}7)\, M^{viga}$ para los refuerzos de apoyo pequeños;

$M = (0{,}4—0{,}6)\, M^{viga}$ para los refuerzos de apoyo grandes.

Las secciones de los montantes se eligen de manera análoga, por la mayor fuerza longitudinal, que se determina suponiendo que las vigas horizontales en contacto con los montantes, se apoyan en ellos por medio de articulaciones. En este caso, las resistencias de cálculo se reducen en un 20—50%, dado que los montantes trabajarán a la flexión longitudinal-transversal debida a la acción de los momentos transmitidos sobre sus extremos. La disminución mayor se toma para los montantes de los extremos y la menor para los del medio.

Está claro, que al determinar preliminarmente las secciones, para su cálculo por un esquema teórico más preciso, no se excluye la posibilidad de asignar las secciones sobre la base del análisis del cálculo de estructuras análogas.

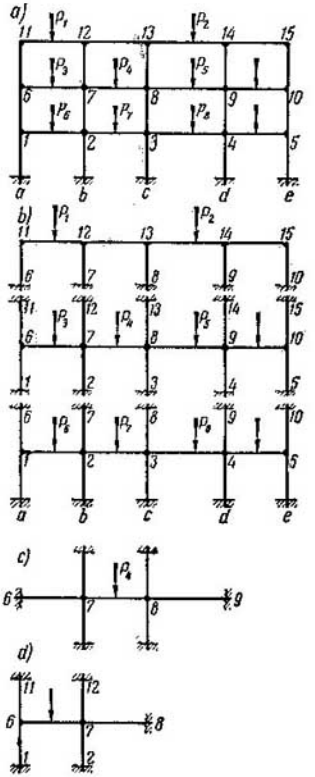
El cálculo por esquemas teóricos más precisos permite precisar previamente con más exactitud las secciones asignadas. En algunos casos nos limitaremos sólo a esto, en otros, las secciones precisadas se adoptan como base para el cálculo exacto definitivo.

La necesidad práctica de métodos de cálculo aproximados es grande, pero, por desgracia, estos métodos no están aún suficientemente elaborados.

§ 208. CALCULO APROXIMADO DE PORTICOS BAJO CARGAS VERTICALES. Los cálculos exactos muestran que la carga ubicada sobre las vigas horizontales de un piso no ejerce influencia sobre los momentos flectores de las vigas horizontales de los otros pisos, por eso, como se muestra en la fig. 416, *b*, el pórtico se descompone en partes independientes. En cada una de estas partes, los montantes se consideran empotrados elásticamente por los extremos, sin desplazamientos progresivos. Cada parte del pórtico se calcula en forma independiente y sobre ella se construye el diagrama de momentos flectores. Estos diagramas se colocan sobre el esquema general del pórtico, después de lo cual se construyen los diagramas de las fuerzas transversales y longitudinales. Por cuanto el cálculo es aproximado, en los nudos y por las diferentes secciones que cortan la parte del pórtico, no habrá un equilibrio completo.

La simplificación ulterior consiste en separar del pórtico sus partes compuestas de tres vigas horizontales con carga sólo sobre la central (fig. 416, *c*). En la fig. 416,*d*, se muestra la parte separada para los tramos extremos.

Fig. 416



Es cómodo efectuar el cálculo de las partes componentes del pórtico por el método de desplazamientos. Para esto es indispensable tener los diagramas de los momentos flectores debidos a los desplazamientos en el elemento estandart, uno de cuyos extremos está empotrado elásticamente (fig. 417, *a*). Cuando su extremo izquierdo gira el ángulo $Z_a = 1$ (fig. 417, *b*) el derecho girará Z_b. El momento flector en el empotramiento del extremo izquierdo disminuye. Supongamos que sea igual a $4ki$, donde, $k < 1$ es un coeficiente de corrección que, cuando el extremo está empotrado rígidamente, es igual a 1 y, si se apoya sobre una articulación, a 0,75. Los momentos flectores en los extremos son:

$$M_{ab} = 4ki = 4i + 2iZ_b; \qquad \text{(a)}$$

$$M_{ba} = -2i - 4iZ_b. \qquad \text{(b)}$$

De (a) tenemos que $Z_b = 2(k-1)$ y, por consiguiente, (fig. 430, *b*):

$$M_{ba} = -2i - 4i \cdot 2(k-1) = 6i - 8ki. \qquad (20.1)$$

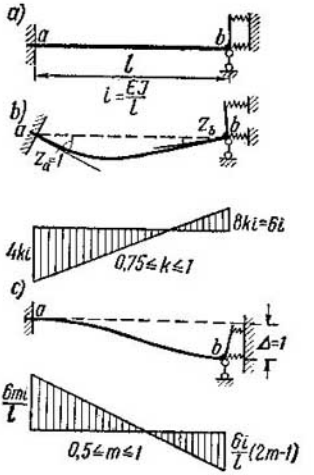
El verdadero valor de k se encontrará entre 1 y 0,75.

Procedemos análogamente, en el caso de un desplazamiento progresivo (fig. 417, *c*), suponiendo que el momento flector en el empotramiento es igual a $\frac{6i}{l}m$, donde, $m < 1$ es un coeficiente de correción. Los momentos flectores en los extremos son:

$$M_{ab} = -\frac{6lm}{l} = -\frac{6i}{l} + 2iZ_b; \qquad \text{(c)}$$

$$M_{ba} = \frac{6i}{l} - 4iz_b. \qquad \text{(d)}$$

Fig. 417



De (c) obtenemos que $Z_b = \frac{3}{l}(1-m)$ y, por consiguiente (fig. 417, *c*):

$$M_{ba} = \frac{6i}{l} - 4i\frac{3}{l}(1-m) = \frac{6i}{l}(2m-1) \qquad (20.2)$$

Con empotramiento rígido en el extremo *b*, el coeficiente $m = 1$, pero, para un apoyo articulado, $m = 0{,}5$. El verdadero valor de m oscila entre estos valores.

Frecuentemente, se desprecian los desplazamientos horizontales de los nudos del pórtico. Si la construcción de la estructura es tal, que los desplazamientos horizontales de los pórticos no son grandes (por haber pisos rígidos), entonces, se obtienen resultados aceptables.

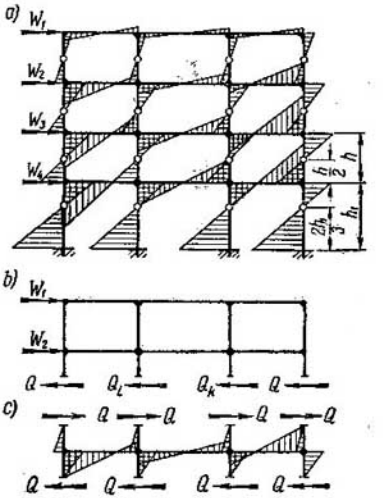
§ 209. CALCULO APROXIMADO DE PORTICOS BAJO CARGAS HORIZONTALES. Los cálculos exactos muestran que, para fuerzas horizontales en los nudos del pórtico (fig. 418, *a*), los puntos cero en el diagrama de momentos flectores se ubican cerca de la parte media de los montantes en todos los pisos, con excepción del inferior, donde ellos se disponen, aproximadamente, a dos tercios de la altura del montante contando desde abajo. Por esta razón, el grado de indeterminación estática del sistema puede ser disminuido introduciendo articulaciones en los puntos nulos de los montantes.

Las fuerzas transversales en los montantes de cada piso son, aproximadamente, proporcionales a la relación $\frac{J}{h^3}$. De acuerdo con esta relación se distribuyen las fuerzas transversales al desplazarse cada piso en el sistema básico del método de desplazamientos. Las fuerzas transversales en los montantes se determinan de la condición de equilibrio (fig. 418, *b*).

$$Q_k = \frac{J_k}{h_k^3}\sum W : \sum \frac{J_i}{h_i^3}, \qquad (20.3)$$

donde $\sum W$ es la suma de las cargas horizontales por encima de

Fig. 418



la sección; $\frac{J_i}{h_i^3}$, la relación para cada montante del piso dado; $\frac{J_k}{h_k^3}$, la relación para el montante en el que se determina la fuerza transversal.

Para igual altura de los montantes, la fórmula (20.3) toma la forma

$$Q_k = J_k \sum W : \sum J_i. \quad (20.4)$$

Una vez determinadas las fuerzas transversales en las articulaciones de todos los montantes, se puede separar del pórtico una viga horizontal con las partes de estos montantes hasta las articulaciones (fig. 418, *c*). Aplicando las fuerzas transversales halladas anteriormente a los extremos de los montantes podemos construir los diagramas de los momentos flectores por los montantes. Luego, se equilibran los momentos no equilibrados en los nudos, con los momentos en las vigas horizontales proporcionales a sus coeficientes de rigidez $i = \frac{EJ}{l}$.

El diagrama de los momentos flectores de M queda construido. Por él se construyen los diagramas de Q y N.

Si la carga horizontal es repartida, entonces, se sustituye por una concentrada en cada nudo. Los diagramas de los momentos flectores en los montantes que reciben sobre sí la carga repartida, pueden ser precisados al final del cálculo, superponiendo sobre el diagrama debido a las cargas concentradas los de los momentos flectores en el montante debidos a la carga repartida, considerando a este montante como una viga sobre dos apoyos. Los pormenores se exponen en [12].

§ 210. METODOS MECANICOS DE CALCULO. Como es sabido, la complicidad del cálculo de los sistemas hiperestáticos consiste en la determinación de los coeficientes de las ecuaciones canónicas y, en particular, sus soluciones.

No obstante, no se debe confundir cualquier mecanización de los trabajosos procesos de cálculo de los sistemas hiperestáticos,

por muy deseable que sea, por ejemplo, la resolución de las ecuaciones canónicas en las actuales máquinas computadoras, con los métodos mecánicos de cálculo de estos sistemas.

Llamaremos mecánicos a los métodos de cálculo de los sistemas hiperestáticos, en los cuales, los desplazamientos, las reacciones y deformaciones se miden sobre modelos, en lugar de caclcularlos.

Los fundamentos teóricos de los métodos mecánicos se desprenden del análisis del estado deformado de los sistemas hiperestáticos y los métodos de cómputo del cálculo de estos sistemas. Los métodos mecánicos más perfectos se basan en las mediciones de los desplazamientos y las deformaciones de los modelos de los sistemas. Examinemos al principio los métodos mecánicos cuyas bases teóricas se desprenden del método de fuerzas. Durante el cálculo a la carga, se pueden medir en el modelo del sistema básico, por ejemplo, los desplazamientos por la dirección de los vínculos eliminados y por ellos, calcular analíticamente las incógnitas básicas. Por cuanto los procedimientos de medición de los desplazamientos no dependen de la indeterminación estática del sistema, entonces, el sistema básico puede ser isostático o hiperestático. Por eso, es cómodo utilizar n modelos de varios sistemas básicos $n - 1$ veces hiperestáticos, para los cuales, cada incógnita básica se determina por la expresión

$$X_i = -\frac{\Delta_{iP}^{(n-1)}}{\delta_{ii}^{(n-1)}}. \qquad (20.5)$$

Podemos proceder de otro modo, a saber: medir en los modelos de los sistemas básicos, no los desplazamientos, sino las fuerzas en los vínculos eliminados, capaces de impedir los desplazamientos, es decir, determinar en forma mecánica la magnitud de las fuerzas incógnitas. El sistema básico, también, en este caso, puede ser tanto isostático como hiperestático. Si es isostático, entonces, las incógnitas básicas para la construcción de los diagramas de las fuerzas internas pueden ser halladas por las lecturas de todos los aparatos de medida de las fuerzas. Pero si es hiperestático, entonces, sólo un modelo puede resultar insuficiente para construir los diagramas de las fuerzas internas. Es necesario recurrir al empleo de varios modelos de diferentes sistemas básicos.

La construcción de las líneas de influencia de las fuerzas internas por el método mecánico se basa en el procedimiento cinemático de su construcción por el método de fuerzas. Este consiste en determinar sobre los modelos los desplazamientos de la línea de carga δ_{P1} y el desplazamiento propio δ_{11} debido a $X_1 = 1$, por la dirección del vínculo excluido en el sistema básico $n - 1$ veces hiperestático, como esto se desprende de la expresión

$$\text{l.i. de } X_1 = -\frac{\delta_{P1}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}. \qquad (20.6)$$

Por cuanto la relación en (20.6) no varía si actuamos sobre el modelo por la direccpón de X_1 con una fuerza diferente de la unidad, entonces, la magnitud de esta fuerza puede ser tomada arbitrariamente, a condición de que, cuando el principio de independencia de acción de las fuerzas es, aproximadamente, correcto, el modelo se encuentra en la fase elástica y tiene desplazamientos pequeños. Esta relación, como muestra la fórmula de desplazamientos, casi no depende de las propiedades del material del modelo, por cuanto los desplazamientos medidos δ_{P1} y δ_{11} dependen insignificantemente de los deslizamientos y, por lo tanto, de las constantes elásticas del material.

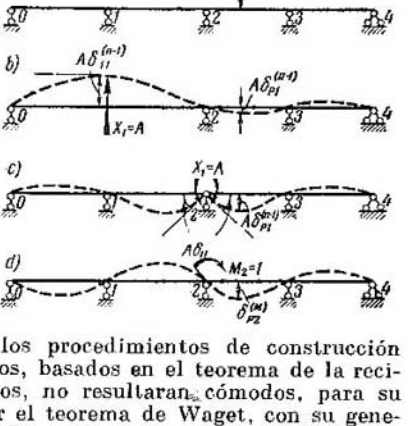
Las bases teóricas de los métodos mecánicos también pueden deducirse del método de desplazamientos. Estos métodos se basan en las mediciones de los desplazamientos angulares y progresivos de los nudos examinados del sistema, debidos a la carga. La construcción de las líneas de influencia de estos desplazamientos por el método mecánico, se basa en el procedimiento cinemático de su construcción por el método de desplazamientos. En este caso, es necesario medir los desplazamientos de la línea de carga δ_{P1}, debido a las fuerzas respectivas que actúan por la dirección de los desplazamientos de los nudos cuyas líneas de influencia se determinan. Por ejemplo, la línea de influencia del ángulo de giro Z_k se determina por los desplazamientos de la línea de carga debida al momento $M = 1$ aplicado al nudo k del sistema dado y, la línea de influencia del desplazamiento progresivo Z_m, por los desplazamientos de la línea de carga debidos a la fuerza $P = 1$ aplicada al sistema dado, por la dirección del desplazamiento Z_m (véase la fig. 398).

Los modelos empleados en los métodos mecánicos de cálculo deberán ser hechos tomando en cuenta la semejanza elástico-mecánica, o sea, sus medidas geométricas, las cargas que actúan sobre ellos y las propiedades elásticas de su material deberán corresponder a la estructura. Al pasar de las dimensiones obtenidas en los modelos a las mismas magnitudes en la realidad deberán considerarse las respectivas escalas. Esta cuestión se trata en el siguiente párrafo.

Aclaremos lo dicho sobre el ejemplo de una viga continua (fig. 419, *a*). Para construir la línea de influencia de la primera reacción de apoyo (fig. 419, *b*) es necesario preparar el modelo de la viga sin este apoyo y cargarlo con la fuerza de valor arbitrario $X_1 = A$. Luego, medir los desplazamientos δ_{P1}^{n-1} y δ_{11}^{n-1} y componer sus relaciones, lo que, precisamente, determinará la línea de influencia de la reacción del modelo y, en seguida, pasar de ella a la línea de influencia del apoyo en la realidad. Para construir la línea de influencia del momento de apoyo (fig. 419, *c*) el modelo se prepara con una articulación sobre el apoyo. Al mismo tiempo, se aplica a esta articulación el momento de valor arbitrario $M = A$, se realiza la medición de δ_{P1}^{n-1} y δ_{11}^{n-1} y se hallan sus relaciones. Para pasar de la línea de influencia obtenida a la real, nos servimos de una escala especial. Al construir la línea de influencia del ángulo de giro en el segundo

apoyo, es necesario aplicarle al modelo del sistema, en este apoyo, un momento externo de valor arbitrario (fig. 419, *d*), medir los desplazamientos δ_{P2} y dividirlos por el valor del momento. Para pasar de la línea de influencia obtenida del modelo a la real, se tienen en cuenta su escala y el módulo de elasticidad del modelo.

Fig. 419



Si por cualquier motivo, los procedimientos de construcción de líneas de influencia expuestos, basados en el teorema de la reciprocidad de los desplazamientos, no resultaran cómodos, para su construcción es posible emplear el teorema de Waget, con su generalización señalada más abajo. Por este teorema, la *línea de influencia de una fuerza interna en un sistema hiperestático, es proporcional a la diferencia entre las ordenadas de las líneas curvas en el sistema dado y en el sistema en que fue excluido el vínculo correspondientemente a la fuerza interna que se determina, debida a la carga arbitraria.* Para construir la línea de influencia, es necesario dividir esta diferencia por el desplazamiento debido a la misma carga, y dirigido por la dirección del vínculo excluido.

Esta tesis es fácil de demostrar. Sea que se exige construir la línea de influencia del momento flector en una acción de la viga continua de la fig. 420, *a*. Su ecuación es. l.i. de $M = -\frac{\delta_{PM}^{n-1}}{\delta_{MM}^{n-1}}$. Ahora, le aplicamos a la viga, con una articulación y sin ella, una carga *arbitraria* (fig. 420, *b*, *c*). Aceptemos que M_P sea el momento flector en esta sección de la viga sin articulación e y_1 e y_2, las ordenadas del eje de la barra curva. Por el principio de independencia de acción de las fuerzas

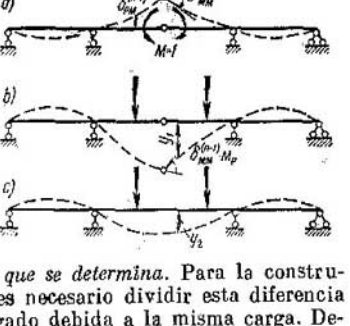
$$y_2 = y_1 + \delta_{PM}^{(n-1)} M_P,$$

de donde obtenemos

$$\text{l.i. de } M = -\frac{\delta_{PM}^{(n-1)}}{\delta_{MM}^{n-1}} = \frac{y_1 - y_2}{\delta_{MM}^{(n-1)} M_P}. \qquad (20.7)$$

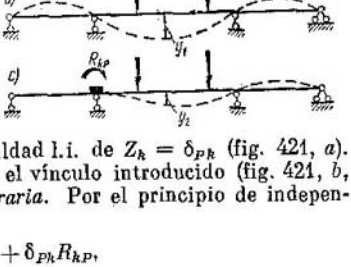
Este teorema lo generalizamos en la línea de influencia de los desplazamientos. Mostremos *que la línea de influencia de un desplazamiento angular o progresivo, de un pórtico o una viga continua, es proporcional a la diferencia entre los desplazamientos de las líneas de carga en el sistema dado y en el sistema con el vínculo introducido,*

Fig. 420



correspondiente al desplazamiento que se determina. Para la construcción de la línea de influencia es necesario dividir esta diferencia por la reacción del vínculo agregado debida a la misma carga. Demostremos esto en el ejemplo de la misma viga continua. La línea de influencia del ángulo de giro se expresa, por medio del diagrama

Fig. 421



de desplazamientos, por la igualdad l.i. de $Z_k = \delta_{Pk}$ (fig. 421, *a*). Al sistema dado y al sistema con el vínculo introducido (fig. 421, *b*, *c*) les aplicamos una carga *arbitraria*. Por el principio de independencia de acción de las fuerzas

$$y_2 = y_1 + \delta_{Pk} R_{kP},$$

de donde obtenemos que

$$\text{l.i. de } Z_k = \delta_{Pk} = \frac{y_2 - y_1}{R_{kP}}. \qquad (20.8)$$

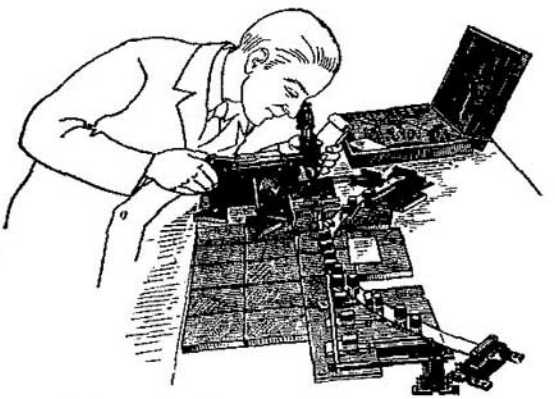
Señalamos que los razonamientos expuestos más arriba con respecto a la viga continua que conducen a las expresiones (20.7) y (20.8), son válidos, también, para cualquier sistema (pórtico, arco, armadura, placa, envoltura...), respectivamente, con cual-

quier vínculo desconectado si, después de la desconexión del vínculo, el sistema permanece invariante.

Por consiguiente, las formulaciones citadas de los teoremas son válidas, también para estos sistemas.

Los modelos se hacen principalmente, de celuloide. Las fuerzas y los momentos que originan los desplazamientos en los modelos se aplican a éstos por medio de dispositivos especiales, la construcción de los cuales aquí no se estudia. Los desplazamientos en los modelos se determinan por medio de diferentes aparatos y, ante todo, con ayuda del microscopio de medida (fig. 422).

Fig. 422



Examinemos algunas líneas de influencia, obtenidas por el método mecánico. En la fig. 423 se muestran las l.i de M, D y N en la llave y el arranque de un arco sin articulaciones y sin superestructura y, en la 424, en la sección de un arco sin articulaciones con superestructura. Allí mismo se representan las líneas de influencia obtenidas por el cálculo sin considerar la superestructura del arco. De estas líneas de influencia se ve que, en los casos, cuando el esquema de cálculo es parecido al de la propia estructura, las líneas de influencia obtenidas por el cálculo son parecidas a las obtenidas en el modelo. El menosprecio de la superestructura del arco durante el cálculo de éstos conduce a grandes errores.

Las posibilidades prácticas de calcular los sistemas hiperestáticos están limitadas por un número determinado de incógnitas básicas. Esto obliga al empleo de esquemas de cálculo simplificados, lo que da resultados inexactos. Los métodos mecánicos pueden ser empleados en el cálculo de sistemas con cualquier número grande de incógnitas básicas, sin una pérdida sustancial de exactitud.

Por cuanto el modelo de una estructura puede ser hecho con mayor semejanza que su esquema de cálculo, incluso, para igual

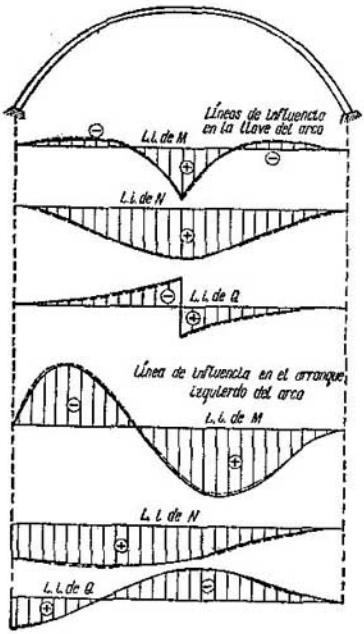


Fig. 423. Confrontación de las líneas de influencia teóricas y experimentales

——— según el cálculo; – – – sobre el modelo

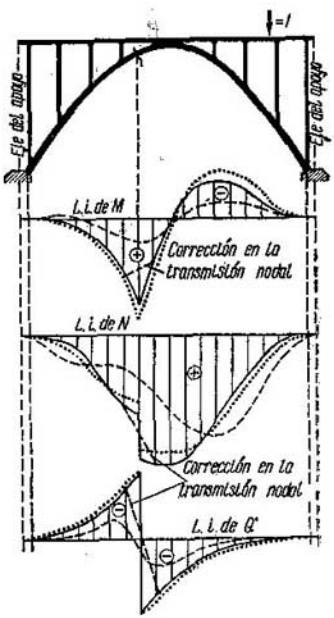


Fig. 424. Confrontación de las líneas de influencia teóricas y experimentales

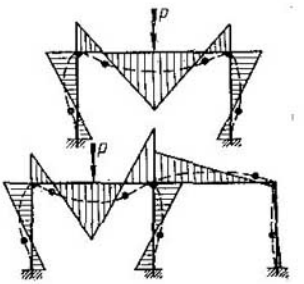
——— según el cálculo, en un arco sin superestructura;
. . . . sobre el modelo del arco sin superestructura;
– – – – sobre el modelo del arco con superestructura

grado de indeterminación estática de éstos, los métodos mecánicos de cálculo, efectuados correctamente sobre los modelos, reflejan mejor el trabajo real de la estructura que el cálculo efuctuado por los esquemas teóricos, sobre todo, cuando el esquema de cálculo se simplifica a fin de simplificar el cálculo. Por eso, los métodos mecánicos de cálculo merecen particular atención. Además, ellos pueden utilizarse para confrontar los resultados obtenidos por medio de los cálculos y el trabajo efectvio de la estructura.

Examinemos otro método mecánico de cálculo muy interesante por su concepción. En él, el sistema hiperestático se transforma en isostático o su indeterminación estática disminuye considerablemente. El modelo se compone de bandas metálicas sueltas, unidas

en los nudos con uniones especiales, y se le aplica la carga dada, cuya magnitud no juega ningún papel. Después, con ayuda de un aparato especial, se mide la curvatura de los elementos del modelo en el estado deformado. Por medio de este mismo aparato se determinan los puntos de inflexión en las barras curvas, donde los momentos flectores son iguales a cero. En estos puntos se pueden introducir tal cantidad de articulaciones que hagan al sistema isostático, cuando esto no es posible, reduzcan al mínimo su indeterminación estática. Una vez introducidas las articulaciones, el sistema se calcula teóricamente, como hiperestático. En la fig. 425, se muestran

Fig. 425



pórticos con articulaciones imaginarias para una carga dada. Después de la introducción de las articulaciones, ambos pórticos resultan isostáticos. El procedimiento, por su idea, es interesante, pero con él, el modelo no siempre puede reflejar análogamente al sistema dado. Por esta razón merece preferencia el método donde se utilizan modelos de celuloide. Algunos otros métodos mecánicos de cálculo se exponen en [13].

§ 211. MODELADO PARA LOS METODOS MECANICOS DE CALCULO. Cuanto mejor refleja el modelo las propiedades de un sistema, tanto más exacto es el cálculo efectuado sobre él. El modelo refleja con más plenitud la estructura modelada si geométricamente es semejante a ella y se confeccionó con un material, cuyo coeficiente de Poissón es idéntico al del material de la propia estructura.

En sentido riguroso, un modelo plano de espesor constante, sólo puede ser semejante a una estructura, cuando ésta es un sistema plano, cuyos elementos también poseen espesor constante. En otros casos, la semejanza será aproximada.

De la semejanza geométrica se deduce que

$$J_{\text{mod}} = \frac{J}{m^4}, \quad F_{\text{mod}} = \frac{F}{m^2}, \tag{20.9}$$

donde $\frac{1}{m}$ es la escala del modelo.

Por cuanto, teóricamente, la variación proporcional de los momentos de inercia y las áreas de las secciones no se refleja en los resultados del cálculo bajo carga, entonces, J_{mod} y F_{mod} se pueden emplear aumentados:

$$J_{mod} = k\frac{J}{m^4}, \quad F_{mod} = k\frac{F}{m^2}, \tag{20.10}$$

donde k es un número positivo arbitrario.

Al mismo tiempo, hay que tener en cuenta que, a causa de la variación de la altura de las secciones de los elementos del modelo, la variación de J_{mod} y F_{mod} puede desfigurar su «fachada» en comparación con el sistema dado y puede introducir ciertos errores. En todo caso, debemos tender a que las «fachadas» del modelo y del sistema sean lo más cercanas posibles a su semejanza geométrica.

El modelado depende de las particularidades del sistema.

Sistemas que trabajan solamente bajo fuerzas longitudinales (armaduras articuladas). Estos sistemas deberán ser modelados por superficie. Si la superficie de cualquier barra del sistema se toma básica $F_{bás}$ y, sobre el modelo como $F_{mod\ bás}$, entonces, según (20.10) obtenemos que

$$F_{mod.\ bás} = \frac{k}{m^2} F_{bás}, \text{ de donde } \frac{k}{m^2} = \frac{F_{mod.\ bás}}{F_{bás}}.$$

Después de esto, obtenemos la fórmula del área de la sección de los elementos del modelo

$$F_{mod.\ i} = F_{mod.\ bás}\frac{F_i}{F_{bás}}, \tag{20.11}$$

donde F_i es el área de la sección de cualquier barra del sistema y $F_{mod\ i}$, su sección en el modelo.

Para un espesor constante c del modelo, las alturas de las secciones se determinan por la expresión

$$h_i = h_{bás}\frac{F_i}{F_{bás}}, \tag{20.12}$$

donde, $h_{bás}$ es la altura de la sección básica en el modelo.

Sistemas que trabajan a la flexión. Estos sistemas deberán ser modelados por los momentos de inercia. Tomando a alguna sección del sistema como básica, designamos su momento de inercia por $J_{bás}$. El momento de inercia de esta sección en el modelo, por (20.10), es igual a:

$$J_{mod.\ bás} = \frac{k}{m^4} J_{bás}, \text{ de donde, } \frac{k}{m^4} = \frac{J_{mod.\ bás}}{J_{bás}}$$

y, el momento de inercia de cualquier sección en el modelo es

$$J_{mod.\ z} = J_{mod.\ bás}\frac{J_z}{J_{bás}}. \tag{20.13}$$

Si el modelo tiene un espesor constante c, entonces, las alturas de algunas secciones en él, son iguales a:

$$h_z = h_{\text{bás}} \sqrt[3]{\frac{J_z}{J_{\text{bás}}}}, \qquad (20.14)$$

donde $h_{\text{bás}}$ es la altura de la sección básica en el modelo.

Sistemas con fuerzas longitudinales y transversales que trabajan a la flexión. Con un enfoque riguroso del problema, estos sistemas se deben modelar tanto por los momentos de inercia como por las áreas de las secciones. Tomando una sección como básica, en la cual $J = J_{\text{bás}}$ y $F = F_{\text{bás}}$, obtenemos que:

$$F_{\text{mod. } z} = F_{\text{mod. bás}} \frac{F_z}{F_{\text{bás}}}, \quad J_{\text{mod. } z} = J_{\text{mod. bás}} \frac{J_z}{J_{\text{bás}}}. \qquad (20.15)$$

Cuando el espesor del modelo es constante, es posible satisfacer a las dos condiciones sólo en casos aislados. Si el modelo se hace de espesor variable con elementos de sección rectangular, entonces,

$$c_z h_z = c_{\text{bás}} h_0 \frac{F_z}{F_{\text{bás}}}, \quad \frac{c_z h_z^3}{12} = \frac{c_{\text{bás}} h_{\text{bás}}^3}{12} \cdot \frac{J_z}{J_{\text{bás}}}.$$

Dividiendo la segunda igualdad por la primera, obtenemos que

$$h_z = h_{\text{bás}} \sqrt{\frac{J_z F_{\text{bás}}}{J_{\text{bás}} F_z}}. \qquad (20.16)$$

Ahora, de la primera ecuación, hallamos que

$$c_z = c_{\text{bás}} \frac{F_z}{F_{\text{bás}}} \sqrt{\frac{J_{\text{bás}} F_z}{F_{\text{bás}} J_z}}, \qquad (20.17)$$

donde $h_{\text{bás}}$ y $c_{\text{bás}}$ son la altura y el espesor de la sección básica en los modelos. Esta última se toma arbitrariamente.

De (20.17) se deduce que el espesor constante de un modelo satisface simultáneamente la condición del modelado por las áreas y los momentos de inercia de las secciones, en los casos cuando:

1) los momentos de inercia y las áreas de las secciones de los elementos del sistema son constantes;

2) las secciones de los elementos del sistema son rectangulares, con ancho (espesor) constante.

El paso de los resultados de la medición de los valores sobre los modelos a los respectivos valores sobre las estructuras se efectúa teniendo en cuenta las escalas del modelo.

1. DETERMINACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Sea que sobre el modelo se midió un desplazamiento Δ_{mod} (progresivo o angular) debido a la carga, cuyo parámetro general es P_{mod} (en kg.). Por este desplazamiento es necesario hallar en la estructura, el desplazamiento Δ debido a la misma carga, cuyo parámetro es P

(en kg.). De acuerdo a la teoría de los desplazamientos, podemos escribir

$$\Delta = \frac{P}{E}\left[\frac{A}{J_{\text{bás}}} + \frac{B}{F_{\text{bás}}} + \mu\frac{C}{F_{\text{bás}}}\cdot\frac{E}{G}\right], \tag{20.18}$$

$$\Delta_{\text{mod}} = \frac{P_{\text{mod}}}{E_{\text{mod}}}\left[\frac{A_{\text{mod}}}{J_{\text{mod. bás}}} + \frac{B_{\text{mod}}}{F_{\text{mod. bás}}} + \mu_{\text{mod}}\frac{C_{\text{mod}}}{F_{\text{mod. bás}}}\cdot\frac{E_{\text{mod}}}{G_{\text{mod}}}\right], \tag{20.19}$$

donde $J_{\text{bás}}$, $F_{\text{bás}}$, $J_{\text{mod.bás}}$ y $F_{\text{mod.bás}}$ son los momentos de inercia y las áreas de la sección básica del sistema y del modelo; A, B, C y A_{mod}, B_{mod}, C_{mod}, ciertos números dependientes de las dimensiones básicas del sistema y su modelo y, μ y μ_{mod}, los coeficientes de Poisson del material de la estructura y el modelo.

Del análisis de las dimensiones de los desplazamientos podemos concluir que,

$$A = nm^2A_{\text{mod}},\quad B = nB_{\text{mod}} \text{ y } C = nC_{\text{mod}}, \tag{20.20}$$

donde $\frac{1}{m}$ es la escala del modelo y n, el número dependiente del tipo de desplazamiento. Durante la determinación de los desplazamientos progresivos, $n = m$, y, al determinar los ángulos, $n = 1$.

Colocando (20.20) en (20.18) y tomando en cuenta a (20.10) obtenemos que

$$\Delta = \frac{Pnk}{m^2E}\left[\frac{A_{\text{mod}}}{J_{\text{mod. bás}}} + \frac{B_{\text{mod}}}{F_{\text{mod. bás}}} + \mu\frac{C_{\text{mod}}}{F_{\text{mod, bás}}}\left(\frac{E}{G}\right)\right].$$

Dividiendo el resultado por (20.19), hallamos que

$$\Delta = \Delta_{\text{mod}}\frac{P}{P_{\text{mod}}}\cdot\frac{E_{\text{mod}}}{E}\times$$

$$\times\frac{nk}{m^2}\cdot\frac{\left[\frac{A_{\text{mod}}}{J_{\text{mod. bás}}} + \frac{B_{\text{mod}}}{F_{\text{mod. bás}}} + \mu\frac{C_{\text{mod}}}{F_{\text{mod. bás}}}\left(\frac{E}{G}\right)\right]}{\left[\frac{A_{\text{mod}}}{J_{\text{mod. bás}}} + \frac{B_{\text{mod}}}{F_{\text{mod. bás}}} + \mu_{\text{mod}}\frac{C_{\text{mod}}}{F_{\text{mod. bás}}}\left(\frac{E_{\text{mod}}}{G_{\text{mod}}}\right)\right]}. \tag{20.21}$$

De esta expresión se ve que sólo siendo $\frac{E}{G} = \frac{E_{\text{mod}}}{G_{\text{mod}}}$, es decir, siendo el coeficiente de Poisson idéntico para el material del modelo y de la estructura, el desplazamiento Δ en esta última se expresa, simplemente, por medio del desplazamiento determinado por el modelo. En este caso obtenemos que

$$\Delta = \Delta_{\text{mod}}\frac{P}{P_{\text{mod}}}\cdot\frac{E_{\text{mod}}}{E}\cdot\frac{nk}{m^2}. \tag{20.22}$$

En los casos restantes, la fórmula (20.22) será aproximada. Por cuanto su aproximación está ligada con la consideración de la influencia de la fuerza transversal sobre los desplazamientos y, correntemente, esta fuerza no es grande, entonces, la observación dada posee más bien un valor teórico. La fórmula (20.22) permite determinar en forma simple la carga con el parámetro P^*, para el cual,

el estado de deformación del sistema es geométricamente semejante al del modelo. En este caso $\Delta = n\Delta_M$,

$$n\Delta_{\text{mod}} = \Delta_{\text{mod}} \frac{P^*}{P_{\text{mod}}} \cdot \frac{E_{\text{mod}}}{E} \cdot \frac{nk}{m^2},$$

de donde

$$P^* = P_{\text{mod}} \frac{E}{E_{\text{mod}}} \cdot \frac{m^2}{k}. \tag{20.23}$$

Si en calidad de parámetro de carga se toma la intensidad de la carga repartida, entonces, análogamente, obtenemos que

$$\Delta = \Delta_{\text{mod}} \frac{q}{q_{\text{mod}}} \cdot \frac{E_{\text{mod}}}{E} \cdot \frac{nk}{m}. \tag{20.24}$$

Lo mismo si en calidad de parámetro de carga se toma el momento externo

$$\Delta = \Delta_{\text{mod}} \frac{M}{M_{\text{mod}}} \cdot \frac{E_{\text{mod}}}{E} \cdot \frac{nk}{m^3}. \tag{20.25}$$

2. CONSTRUCCIÓN DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA

Por cuanto las líneas de influencia de las fuerzas internas y reacciones de apoyo se determinan por las relaciones de los desplazamientos, la magnitud de la carga no tiene importancia. Por eso, el paso de las líneas de influencia para el modelo a las líneas de influencia para la estructura se puede llevar a cabo sobre la base de un análisis de las dimensiones de la línea de influencia, tomando en cuenta la escala del modelo.

La línea de influencia del momento flector tiene la dimensión de longitud, de ahí que sus ordenadas tengan que ser multiplicadas por la escala m del modelo.

Las líneas de influencia de la fuerza longitudinal, de la de corte y de las reacciones de fuerza de apoyo, son adimensionales. Sus ordenadas en la línea de influencia, obtenida sobre el modelo, se conservan sin variación para la propia estructura.

Las abscisas de todas las líneas de influencia se miden en la escala del modelo.

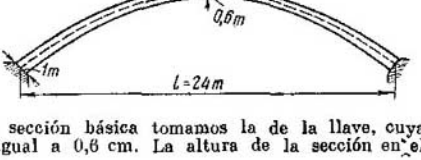
Las líneas de influencia de los desplazamientos se determinan por la fórmula (20.22), para $P = 1$ (para los desplazamientos progresivos) y por la (20.25) para $M = 1$ (para los desplazamientos angulares).

Ejemplo 53. Determinar las dimensiones del modelo de celuloide para el arco de la fig. 426. La escala del modelo es $\frac{1}{m} = 100$. La altura de la sección del arco en el arranque es $h = 1$ m, el ancho, $b = 1$ m. La altura de la sección del arco en la llave es $h = 0{,}6$ m, el ancho, b = 512 m. Hallemos las dimensiones del modelo en dos variantes.

Primera variante: como sección básica tomamos la de arranque, cuya altura en el modelo se fija igual a 1 cm. La altura de la sección en la llave del modelo se determina por la fórmula (20.14).

$$h_{\text{llave}} = 1 \sqrt[3]{\frac{0{,}512 \cdot 0{,}6^3}{12} : \frac{1 \cdot 1^3}{12}} = 0{,}48 \text{ cm}.$$

Fig. 426



Segunda variante: como sección básica tomamos la de la llave, cuya altura en el modelo se elige igual a 0,6 cm. La altura de la sección en el arranque del modelo es

$$h_{\text{arr}} = 0{,}6 \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 1^3}{12} : \frac{0{,}512 \cdot 0{,}6^3}{12}} = 1{,}25 \text{ cm}.$$

CAPITULO XXI * CARGAS LIMITES DE LOS SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS

§ 212. ESTADOS LIMITES DE LOS SISTEMAS POR SU CAPACIDAD PORTANTE. La rotura de los sistemas hiperestáticos, como también la de los isostáticos, a causa de la acción de la carga, depende de las propiedades del material de que éstos están construidos y está ligada al inicio de la variabilidad en cualquier parte del sistema. La invariabilidad del sistema hiperestático, en la parte donde hay vínculos superfluos, sólo puede ser alterada eliminando del mismo no menos de dos vínculos. Por esta razón, en los sistemas hiperestáticos, el surgimiento de una rodadura pasante en una barra cualquiera, no siempre conduce a la variabilidad del sistema, y la aparición de una articulación plástica, nunca.

La parte hiperestática del sistema puede hacerse variante al aparecer en ella no menos de dos articulaciones plásticas o, en algunos casos, al romperse alguna barra en dos partes. Por cuanto la articulación plástica es unilateral (§ 83), entonces, incluso, en un sistema con un grado de indeterminación estática, el surgimiento de dos articulaciones no siempre conduce a su variabilidad.

Por ejemplo, la presencia de dos articulaciones plásticas en los montantes del pórtico biarticulado de la fig. 427, con la condición de que los momentos flectores en ellos traccionan el lado externo de los montantes, lo que ocurre, en particular, para una carga vertical dirigida hacia abajo, en la viga horizontal, teóricamente, no transforma al pórtico en un sistema variante. La cuestión se explica con que, para el desplazamiento horizontal del falso tirante, una

de las articulaciones plásticas se «cierra», o sea, deja de existir. Teóricamente, el pórtico se transforma en triarticulado, donde, la tercera articulación coincide con una de las dos plásticas. El estado límite de tal pórtico aparece con el surgimiento de la tercera articulación plástica en la viga horizontal.

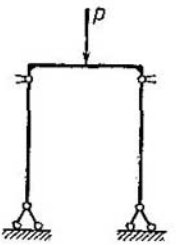


Fig. 427

Para la rotura total de un sistema n veces hiperestático, en el cual, ninguna de sus partes puede equilibrar a la carga, para transformarlo en todas sus partes en un sistema variante sin vínculos superfluos, es necesario excluir de él no menos de $n + 1$ vínculos.

Por cuanto, para los sistemas de materiales frágiles que se deforman linealmente hasta la rotura, el cálculo por el estado elástico es correcto mientras no se rompa la sección, entonces, todo lo expuesto al examinar las cargas límites para los sistemas isostáticos hechos de tales materiales puede ser empleado también aquí con algunas modificaciones. Por eso, en adelante, examinaremos principalmente, los sistemas de materiales plásticos.

§ 218. CALCULO DE VIGAS DE UN TRAMO DE SECCION CONSTANTE. Para simplificar el cálculo, determinaremos las cargas límites **sin considerar** la fuerza de corte Q, por cuanto, corrientemente, su influencia es insignificante y su consideración, sólo lo complica. En este caso, debe tenerse en cuenta que, para este cálculo las cargas límites estarán un poco elevadas.

1. VIGA CON APOYO ARTICULADO EN EL EXTREMO IZQUIERDO Y EMPOTRAMIENTO EN EL DERECHO

El estado límite surge al aparecer dos articulaciones plásticas: la primera, comúnmente, en el empotramiento, con abertura hacia arriba y la segunda, en el tramo, con abertura hacia abajo (fig. 428). Si, siendo $z = a$, la posición de la articulación en el tramo es conocida, como por ejemplo, en la fig. 428, entonces, de consideraciones geométricas, obtenemos que

$$M_a^{\text{vig}} = M_{\text{lím}} + \frac{a}{l} M_{\text{lím}}, \text{ de donde } M_{\text{lím}} = \frac{M_a^{\text{vig}}}{1 + \frac{a}{l}}, \quad (21.1)$$

Fig. 428

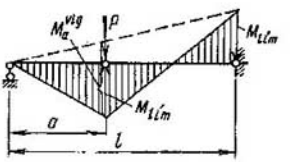


Fig. 429

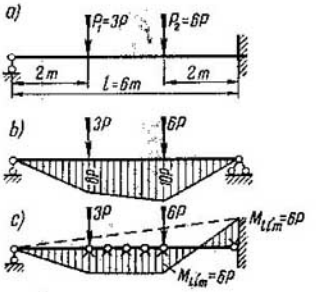
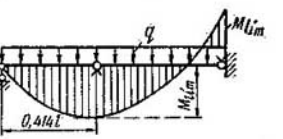


Fig. 430



donde M_a^{vig} es el momento flector en una viga simplemente apoyada debido a la carga.

Si la posición de la articulación plástica no es conocida, por ejemplo, en el caso de varias fuerzas (fig. 429) o de carga repartida (fig. 430), entonces, la articulación plástica apareçerá en la sección, para la cual, el segundo miembro de la expresión (21.2) alcanza el máximo.

La condición de estado máximo, sin considerar la fuerza transversal, es

$$M_{lim} = \frac{M_a^{vig}}{1+\frac{a}{l}} = \sigma^t W_{sec}. \qquad (21.2)$$

Sustituyendo σ^t por la resistencia mecánica de cálculo con el coeficiente de condiciones de trabajo $mR = mkR^H$, esta condición puede ser empleada para determinar la carga de cálculo límite por la sección conocida de la viga o para elegir la sección, si se conoce la carga teórica.

Ejemplo 54. Determinar el parámetro P (en kg.) de la carga de cálculo para la viga de la fig. 429, *a*, si $W_{sec} = 300$ cm³, $mR = 2\,000$ kgf/cm² y $l = 6$ m. La influencia del peso propio de la viga y la de la fuerza transversal no se considera.

Aclaremos el lugar en donde puede surgir la articulación plástica. Para esto, construimos el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga en la viga simplemente apoyada (fig. 429, *b*). La articulación plástica puede estar debajo de una de las fuerzas P_1, ó P_2. Por la fórmula (21.1) obtenemos que: si la articulación plástica está debajo de la fuerza P_1, entonces,

$$M_{lim} = \frac{8P}{1+\frac{2}{6}} = 6P \text{ kgfm},$$

si la articulación plástica está debajo de la fuerza P_2, entonces,

$$M_{\text{lím}} = \frac{10P}{1+\frac{4}{6}} = 6P \text{ kgfm}.$$

Los valores de $M_{\text{lím}}$ resultaron idénticos. Esto significa que cualquier sección transversal de la viga, entre las fuerzas P_1 y P_2 se hallará en estado de articulación plástica (fig. 429, *c*). Por la condición de estado límite, $6P\ 100 = 2\,000 \cdot 300$, de donde, $P = 1\,000$ kg.

Ejemplo 55. Determinar el parámetro de la carga teórica q (en kgf/m) para la viga de la fig. 430, sin considerar las fuerzas transversales y el peso propio, si $W_{\text{sec}} = 300$ cm³, $mR = 2\,000$ kgf/cm² y $l = 6$ m.

La posición de la articulación plástica se desconoce. Para su determinación componemos la expresión del segundo miembro de (21.1); tomamos el diferencial y lo igualamos a cero:

$$A = \frac{M_a^{\text{vig}}}{1+\frac{a}{l}} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{a(l-a)}{l+a};$$

$$\frac{dA}{da} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{(l-2a)(l+a) - a(l-a)1}{(l-a)^2} = 0,$$

de donde obtenemos que

$$a = l(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}414l. \tag{21.3}$$

Después de esto, por (21.1), tendremos que

$$M_{\text{lím}} = \frac{ql^2}{2}(3-2\sqrt{2}) \approx 0{,}086ql^2 \text{ kgfm}. \tag{21.4}$$

La condición de estado límite, por (21.2), es

$$0{,}086q \cdot 6^2 \cdot 100 = 2\,000 \cdot 300, \text{ de donde } q = 1\,938 \text{ kgf/m}.$$

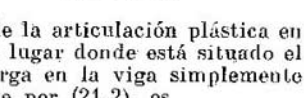
Si suponemos que la articulación plástica está ubicada en el centro del tramo obtenemos un resultado aproximado. En este caso,

$$\frac{q \cdot 6^2}{8\left(1+\frac{3}{6}\right)} 100 = 2\,000 \cdot 300, \text{ de donde } q = 2\,000 \text{ kgf/m}.$$

2. VIGA EMPOTRADA EN LOS DOS EXTREMOS (fig. 431)

Comúnmente, el estado límite se determina con la aparición de tres articulaciones plásticas: dos en los empotramientos y una

Fig. 431

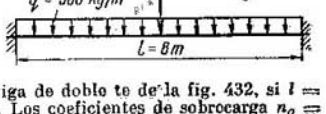


en el tramo. En este caso, la posición de la articulación plástica en el tramo se conoce, ella coincide con el lugar donde está situado el mayor momento flector debido a la carga en la viga simplemente apoyada. La condición de estado límite por (21.2), es

$$M_{\text{lím}} = \frac{M_{\text{máx}}^{\text{vig}}}{2} \leqslant \sigma^t W_{\text{sec}}. \tag{21.5}$$

Si no se considera la fuerza transversal, la carga límite para una viga empotrada en los dos extremos es siempre 2 veces mayor que la límite para una viga simplemente apoyada.

Fig. 432



Ejemplo 56. Elegir la sección de la viga de doble te de la fig. 432, si $l = 8$ m, $q^c = 500$ kgf/m, $p^c = 2\,000$ kgf. Los coeficientes de sobrecarga $n_q = 1{,}1$ y $n_p = 1{,}5$; $mR = 2\,000$ kgf/cm². De las condiciones de estado límite (21.5) tenemos que

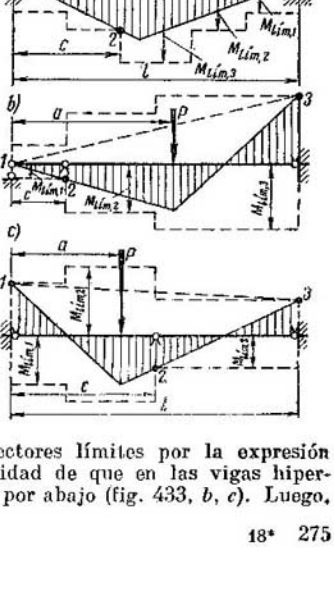
$$\left(\frac{1{,}5 \cdot 2\,000 \cdot 8}{4} + \frac{1{,}1 \cdot 500 \cdot 8^2}{8}\right) 100 = 2\,000 W_{sec} \cdot 2,$$

de donde, $W_{sec} = 260$ cm³ y, aproximadamente,

$$W = \frac{W_{sec}}{1{,}15} = 225 \text{ cm}^3.$$

§ 214. CALCULO DE VIGAS DE UN SOLO TRAMO CON SECCION VARIABLE. La variabilidad de las secciones complica el cálculo de las vigas puesto que dificulta la determinación de las posiciones

Fig. 433



de las articulaciones plásticas y puede conducir a la aparición de tres de ellas, ubicadas en forma sucesiva, con momentos flectores de un mismo signo y con diferentes combinaciones de articulaciones con momentos flectores positivos y negativos. Sin embargo, las vigas se tornan variantes, sólo con tres articulaciones cuyas aberturas están dirigidas sucesivamente en distintas direcciones.

Para la determinación de la posición de las articulaciones plásticas, sin considerar la fuerza transversal, es necesario construir el diagrama de los momentos flectores límites por la expresión $M_{lim} = \sigma^t W_{sec}$, con la particularidad de que en las vigas hiperestáticas esto se hace por arriba y por abajo (fig. 433, *b*, *c*). Luego,

en este diagrama, es necesario inscribir el de los momentos flectores de la viga simplemente apoyada debidos a la carga, de manera que pase o por las dos articulaciones plásticas haciendo contacto por abajo con el punto *2* de la línea de momentos límites (fig. 433, *a*) o, por una haciendo contacto con la línea de momentos límites en los dos puntos *2* y *3* a ambos lados de la viga (fig. 433, *b*), o toque a dicha línea en los puntos *1*, *2* y *3*, ubicados sucesivamente a ambos lados de la viga (fig. 433, *c*).

Luego, sobre la base de consideraciones geométricas, se componen las condiciones de estado límite. Por ejemplo, para las vigas representadas en la fig. 433, *a*, *b*, *c*, éstas serán

$$\frac{P(l-a)}{l}\, c = M_{\text{lím. }2};$$

$$\frac{P(l-a)\, c}{l} = M_{\text{lím. }1} + M_{\text{lím. }3}\frac{c}{l};$$

$$\frac{Pa}{l}(l-c) = 2M_{\text{lím. }3} + \frac{M_{\text{lím. }1} - M_{\text{lím. }3}}{l}(l-c).$$

§ 215. CALCULO DE VIGAS CONTINUAS DE SECCION CONSTANTE EN TRAMOS SUELTOS. Para simplificar, determinaremos las cargas límites **sin considerar** las fuerzas transversales.

Estado límite de una viga continua es aquél, cuando, dentro de los límites de un tramo cualquiera surgen tres articulaciones plásticas con sus aberturas dirigidas, sucesivamente en distintas direcciones. Corrientemente, dos de ellas surgen en los apoyos y la tercera en el tramo, lo cual, precisamente, supondremos aquí.

En este caso, se sobreentiende que, si los tramos lindantes al apoyo poseen diferentes secciones, entonces, la articulación plástica de apoyo se desarrollará en la más débil.

La rotura completa de una viga continua sucederá cuando surjan tres articulaciones plásticas dentro de los límites de cada uno de sus tramos. El orden de cálculo, que se deduce del carácter de la rotura de las vigas hiperestáticas de un tramo, depende de si se determina la carga límite o se elige la sección.

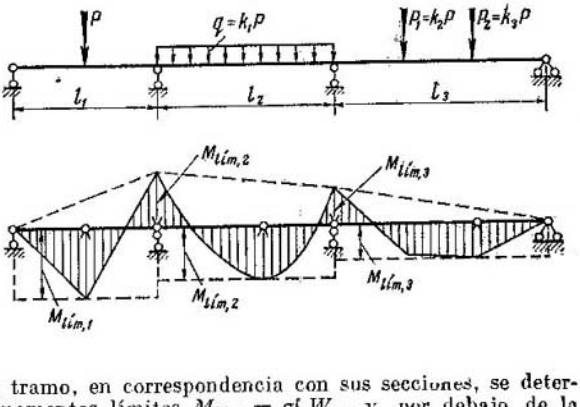
1. DETERMINACIÓN DE LA CARGA LÍMITE

El cálculo se lleva a cabo del siguiente modo (fig. 434).

La carga deberá ser expresada con un parámetro por toda la viga, el cual es, precisamente, la magnitud buscada.

Los momentos de apoyo límites $M_{\text{lím}} = \sigma^t W_{\text{sec}}$ se determinan por las secciones mínimas de los tramos lindantes con el apoyo. Sus valores se trazan desde la base del diagrama de momentos flectores, coincidente con el eje de la viga, y los diagramas de los momentos flectores, debidos a estos momentos de apoyo, se representan con líneas punteadas.

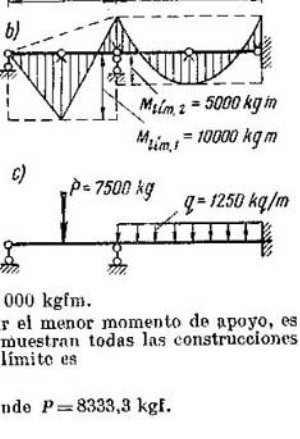
Fig. 434



En cada tramo, en correspondencia con sus secciones, se determinan los momentos límites $M_{lím} = \sigma^t W_{sec}$ y, por debajo de la viga, se traza la línea de estos momentos.

A la línea de los momentos de apoyo se le «cuelga» el diagrama de momentos flectores de la viga simplemente apoyada, correspondiente al tipo de carga sobre el tramo dado, de tal modo que, por

Fig. 435



abajo, tenga contacto con la línea de momentos límites.

Partiendo de la suposición sobre la rotura de cada tramo por separado, se determina el parámetro de la carga límite y se elige su valor mínimo.

Ejemplo 57. Determinar la carga límite para la viga continua de la fig. 435, con la condición de que los momentos límites sean en el primer tramo $M_{lím} = 10\,000$ kgfm y, en el segundo, $M_{lím} = 5\,000$ kgfm.

En el apoyo del medio es necesario tomar el menor momento de apoyo, es decir, el de 5 000 kgfm. En la fig. 435, *b* se muestran todas las construcciones indispensables. En el primer tramo, la carga límite es

$$\frac{P \cdot 6}{4} = 10\,000 + \frac{5\,000}{2}, \text{ de donde } P = 8333{,}3 \text{ kgf.}$$

En el segundo tramo, la carga límite es

$$\frac{q \cdot 8^2}{8} = \frac{\frac{P}{6} 8^2}{8} = 5\,000 + 5\,000, \text{ de donde } P = 7\,500 \text{ kgf}.$$

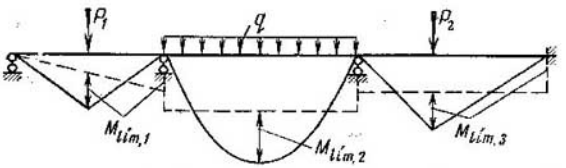
La carga límite, para el parámetro de menor valor $P = 7\,500$ kgf, se muestra en la fig. 435, *c*.

2. ELECCION DE LAS SECCIONES POR LA CARGA TEÓRICA DADA

La elección de las secciones exige la determinación de los momentos flectores de cálculo en las articulaciones plásticas, debidos a la carga teórica dada. Estos se determinan por los diagramas de cálculo de los momentos flectores, que se construyen de la siguiente manera (fig. 436).

En cada tramo de la viga continua se construye el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga efectiva, como sobre una viga isostática de un solo tramo.

Fig. 436



En cada tramo se traza la línea de los momentos de apoyo, de tal modo que el momento de apoyo, si es único en el tramo, sea igual al momento flector en él o, que si son dos, también sean iguales al momento flector en el tramo. A tal operación la llamaremos equilibrado *previo* de momentos.

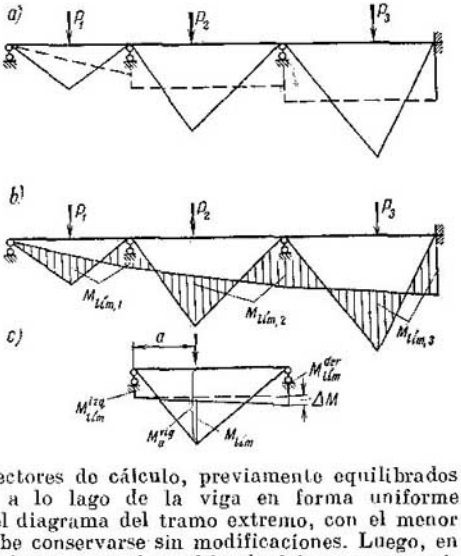
Si se dimensiona una viga de sección constante, entonces, es indispensable tomar por momento de cálculo *al mayor* de los momentos previamente equilibrados por los tramos sueltos de la viga. La sección se determina por la fórmula

$$W_{\text{sec}} = \frac{M_{\text{lím}}}{mR}. \qquad (21.6)$$

En este caso, el estado límite se determina con la aparición de tres articulaciones plásticas en el tramo, donde los momentos previamente equilibrados resultaron mayores. Los tramos restantes quedan indemnes. Tal momento de cálculo en la fig. 436, será el $M_{\text{lím},2}$.

Si se dimensiona una viga con diferentes secciones en algunos de los tramos, es decir, se supone que la aparición de las articulaciones plásticas es simultánea en todos los tramos, entonces, por cuanto sobre un mismo apoyo no pueden haber dos articulaciones plásticas, el diagrama de cálculo se construye según los valores de los momentos flectores previamente equilibrados.

Fig. 437



Si los momentos flectores de cálculo, previamente equilibrados por los tramos, varían a lo lago de la viga en forma uniforme (fig. 437, *a*), entonces, el diagrama del tramo extremo, con el menor momento de cálculo, debe conservarse sin modificaciones. Luego, en el siguiente tramo, se debe efectuar el equilibrado del momento positivo en el tramo y del negativo sobre el apoyo siguiente (en la fig. 437, *a*, el derecho), si existe el momento dado en el apoyo anterior (izquierdo). Y así sucesivamente (fig. 437, *b*). Esta operación puede ser efectuada analíticamente, sobre la base de simples consideraciones (fig. 437, *c*).

Consideraremos que la posición de la articulación plástica en el tramo es conocida. Ella se determina con la coordenada $z = a$. Designamos al momento derecho sobre el apoyo con $M_{\text{lím}}^{\text{der}}$ y lo expresamos por medio del izquierdo:

$$M_{\text{lím}}^{\text{der}} = M_{\text{lím}}^{\text{izq}} + \Delta M.$$

El valor absoluto de la incrementación ΔM se determina por la igualdad

$$M_a^{\text{vig}} - M_{\text{lím}}^{\text{izq}} - \Delta M \frac{a}{l} = M_{\text{lím}}^{\text{izq}} + \Delta M,$$

de donde obtenemos que

$$\Delta M = (M_a^{\text{vig}} - 2M_{\text{lím}}^{\text{izq}}) : \left(1 + \frac{a}{l}\right).$$

Por consiguiente, el momento derecho buscado es igual a:

$$M_{\text{lím}}^{\text{der}} = M_{\text{lím}}^{\text{izq}} + \Delta M = \left[M_a^{\text{vig}} - M_{\text{lím}}^{\text{izq}} \left(1 - \frac{a}{l}\right)\right] : \left(1 + \frac{a}{l}\right). \qquad (21.7)$$

En aquellos casos, cuando el tramo derecho posee en su extremo un apoyo articulado, la resultante de los momentos de apoyo en este tramo se encuentra sin calcularlo, uniendo el momento de apoyo izquierdo con el punto de la base por debajo del apoyo derecho.

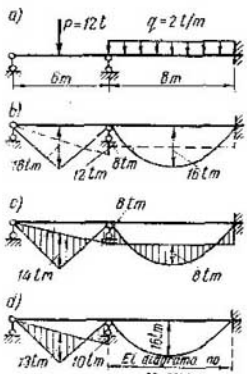
La sección se dimensiona en cada tramo por el mayor momento flector en éste.

Si los momentos flectores previamente equilibrados en los tramos (fig. 439, *b*), varían a lo largo de la viga en forma no uniforme, entonces, para la obtención del diagrama de cálculo de los momentos flectores es necesario lo siguiente.

Conservar el diagrama de momentos flectores en el tramo con el menor momento flector de cálculo.

Luego, de los tramos que quedan, examinar el tramo con menor momento flector previamente equilibrado. Si linda con el tramo examinado anteriormente, entonces, sobre él, es necesario construir el diagrama de cálculo, equilibrando el momento del tramo con el siguiente momento de apoyo, empleando la expresión (21.7). Pero si no linda, entonces es conveniente que, sobre él, sea conservado el diagrama previamente equilibrado. Y así sucesivamente, hasta que el nuevo tramo resulte entre los examinados anteriormente. Entonces, la línea resultante de los momentos de apoyo se traza sobre él por los momentos de apoyo de los tramos vecinos determinados anteriormente.

Fig. 438

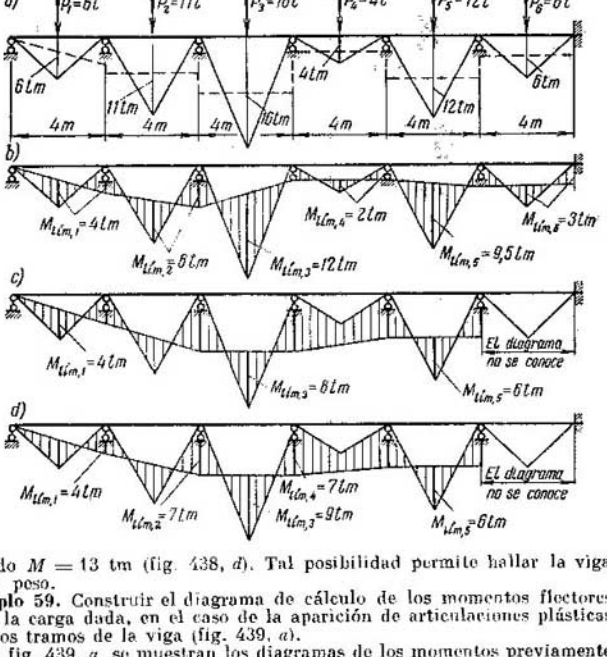


Ejemplo 58. Construir en la viga de la fig. 438, *a* el diagrama de cálculo de los momentos flectores debidos a la carga dada.

En la fig. 438, *b* se ha realizado el equilibrio previo de los momentos.

Si la viga es de sección constante, entonces, el momento de cálculo es $M = 12$ tm. Las articulaciones plásticas aparecerán sólo en el primer tramo. Si las secciones de la viga son distintas en los distintos tramos, entonces, sobre el apoyo del medio es necesario tomar al momento de apoyo igual a 8 tm y, en el primer tramo, trazar la línea de los momentos de apoyo por el punto de la base por debajo del apoyo izquierdo (fig. 438, *c*). La sección del primer tramo se dimensiona por el momento $M_{1\text{fm}} = 14$ tm y, la del segundo, por el $M = 8$ tm. En la viga aparecerán cuatro articulaciones plásticas. El dimensionado de las diferentes secciones por los tramos, se puede realizar de otra manera. Por ejemplo, se puede dimensionar la sección del primer tramo por el momento $M_{1\text{fm}} = 13$ tm (entre 12 y 14 tm), pero entonces, la del segundo, deberá ser elegida por el $M_{1\text{fm}} = 10$ tm, a fin de garantizarle al primer tramo el correspondiente momento de apoyo, con el cual, el momento en el tramo no sea mayor que

Fig. 439



el adoptado $M = 13$ tm (fig. 438, *d*). Tal posibilidad permite hallar la viga de menor peso.

Ejemplo 59. Construir el diagrama de cálculo de los momentos flectores debidos a la carga dada, en el caso de la aparición de articulaciones plásticas en todos los tramos de la viga (fig. 439, *a*).

En la fig. 439, *a*, se muestran los diagramas de los momentos previamente equilibrados. Si la viga tuviera sección constante, entonces, para ella, el momento de cálculo sería $M_{lim} = 8$ tm.

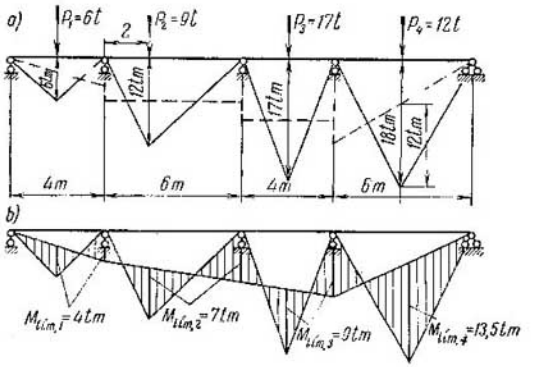
Los valores de los momentos previamente equilibrados varían desuniformemente a lo largo de la viga. Por eso procedemos como se expuso más arriba. Al principio, examinamos el cuarto tramo, en el cual el diagrama será conservado invariante. El momento de cálculo es $M_{lim,\,4} = 2$ tm. Luego examinamos el sexto tramo, en el cual el diagrama también será conservado invariante. El momento de cálculo para él es $M_{lim,\,6} = 3$ tm. Luego examinamos el primer tramo, en el cual el diagrama se conserva. El momento de cálculo para este tramo es $M_{lim,\,1} = 4$ tm. Por fin, examinamos el segundo tramo. Por cuanto con él linda el primero, ya examinado, efectuamos el equilibrio del momento del tramo con el de apoyo derecho. Por la expresión (21.7) hallamos el momento de cálculo para el segundo tramo.

$$M_{lim,\,2} = \left[11 - 4\left(1 - \frac{2}{4}\right)\right] : \left(1 + \frac{2}{4}\right) = 6 \text{ tm}.$$

En los tramos tercero y quinto trazamos las resultantes de los momentos de apoyo por los hallados anteriormente de los tramos vecinos con ellos. Los momentos de cálculo para estos tramos serán $M_{lim,\,3} = 12$ tm y $M_{lim,\,5} = 9{,}5$ tm, respectivamente (fig. 439, *b*).

Si en la viga no presuponemos la aparición de todas las articulaciones plásticas, entonces la viga con diferentes secciones en los tramos puede ser obtenida de distintas maneras. Por ejemplo, es posible el dimensionado de sus secciones por los siguientes valores de los momentos flectores: en el primer tramo $M_{\text{lím},1} = 4$ tm, en el segundo, tercero y cuarto, $M_{\text{lím}} = 8$ tm y, en el quinto y sexto, $M_{\text{lím}} = 6$ tm. En la fig. 439, *c*, se muestra el diagrama de los momentos de cálculo. En este caso, en los tramos segundo, cuarto y sexto no habrán articulaciones plásticas.

Fig. 440



En la fig. 439, *d* se muestra otra variante, donde los momentos de cálculo serán: $M_{\text{lím},1} = 4$ tm, $M_{\text{lím},2} = 7$ tm, $M_{\text{lím},3} = 9$ tm, $M_{\text{lím},4} = 7$ tm, $M_{\text{lím},5} = 6$ tm y $M_{\text{lím},6} = 6$ tm. En los tramos segundo, cuarto y sexto no habrán articulaciones plásticas.

Ejemplo 60. Construir el diagrama de cálculo de los momentos flectores debidos a la carga dada, al aparecer articulaciones plásticas en todos los tramos de la viga de la fig. 440.

En la fig. 440, *a*, se expone el diagrama de los momentos previamente equilibrados por los tramos. Para la viga de sección constante, el mayor momento de cálculo en el cuarto tramo es igual a $M_{\text{lím}} = 12$ tm. Los momentos previamente equilibrados varían uniformemente. Por eso procedemos de acuerdo a lo expuesto en la pág. 278.

En el primer tramo conservamos el diagrama sin modificarlo. En el segundo y tercero efectuamos el equilibrado de los momentos de los tramos y de los momentos de apoyo derechos empleando la expresión (21.7).

En el segundo tramo $M_{\text{lím}}^{\text{der}} = \left[12 - 4\left(1 - \frac{2}{6}\right)\right] : \left(1 + \frac{2}{6}\right) = 7$ tm.

En el tercer tramo $M_{\text{lím}}^{\text{der}} = \left[17 - 7\left(1 - \frac{2}{4}\right)\right] : \left(1 + \frac{2}{4}\right) = 9$ tm.

En los tramos dados estos momentos serán precisamente de cálculo.

En el cuarto tramo, la resultante de los momentos de apoyo está unida con el punto de la base sobre la vertical del apoyo derecho. El momento de cálculo para él es $M_{\text{lím},4} = 13{,}5$ tm. En la fig. 440, *b* se expone el diagrama de cálculo de los momentos.

§ 216. CALCULO DE VIGAS CONTINUAS DE SECCION VARIABLE. El estado límite de las vigas continuas de sección variable como, así también, de las de sección constante, llega, cuando en un tramo cualquiera surgen tres articulaciones plásticas con abertura, por turno, en diferentes direcciones. Por eso, al principio, es indispensable revelar las posibles variantes de aparición de tres articulaciones plásticas (o de dos, ante una real) en cada tramo, por el diagrama de los momentos límites $M_{\text{lím}}$ determinados por

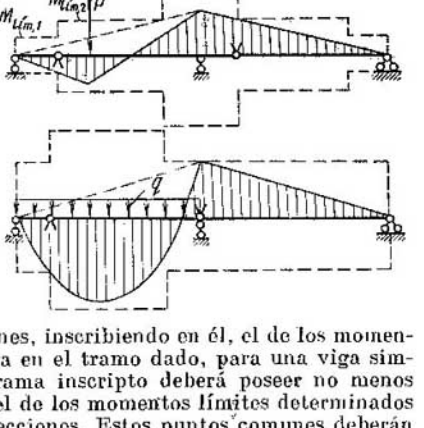


Fig. 441

las dimensiones de las secciones, inscribiendo en él, el de los momentos límites debidos a la carga en el tramo dado, para una viga simplemente apoyada. El diagrama inscripto deberá poseer no menos de tres puntos comunes con el de los momentos límites determinados por las dimensiones de las secciones. Estos puntos comunes deberán estar sobre el diagrama de momentos límites, por turno, a diferentes lados de la viga. Ante un apoyo articulado en el extremo del último tramo, uno de los tres puntos coincidirá con la articulación. El cálculo deberá ser efectuado para cada posible variante, las cuales son pocas (uno a dos). En calidad de carga límite se debe tomar la menor obtenida de los resultados del cálculo. En la fig. 441 se muestran ejemplos de inscripción de diagramas.

§ 217. CALCULO DE PORTICOS Y ARCOS. La complejidad del cálculo de los pórticos y, particularmente de los arcos, se explica con que no siempre está claro en donde surgirán las articulaciones plásticas, dado que ello, depende de los valores de todas las fuerzas internas M, Q y N y las posibles variantes de su aparición son más que en las vigas. En muchos casos, si se desprecia la influencia que ejercen las fuerzas longitudinales en la aparición de momentos complementarios en el estado deformado del sistema, la cual, hablando en general, en un estado límite con grandes desplazamientos puede ser considerable, entonces, la consideración de las fuerzas longitu-

dinal y transversal en el estado límite de la sección, tiene poca influencia. Con tales premisas, esto permite determinar aproximadamente, y a veces con exactitud, la posición de las articulaciones plásticas por el diagrama de los momentos flectores límites, cuya forma es dictada por el cálculo usual de la elasticidad de los sistemas hiperestáticos.

El cálculo de pórticos y arcos considerando el desarrollo de las deformaciones plásticas, se efectúa sobre la base de las siguientes admisiones aceptadas habitualmente:

1) no se tiene en cuenta la influencia de las fuerzas transversales;

2) las fuerzas internas se determinan por el estado indeformado, sin considerar los momentos flectores complementarios en el estado deformado, los cuales, ante grandes desplazamientos en el estado límite del sistema, pueden ser sustanciales;

3) se considera que la articulación plástica permite un solo movimiento y, precisamente, la rotación de las secciones con respecto a la línea neutra hacia el lado de la abertura de la articulación, lo que disminuye el grado de indeterminación estática del sistema en una unidad.

La primera admisión y, frecuentemente, la segunda, llevan a un margen de seguridad elevado en comparación con el real.

La condición de estado límite de la sección, ante un momento flector y una fuerza longitudinal, según (10.15), será

$$\frac{M_{\text{lím}}}{\sigma^{\text{f}}} + \frac{N^2_{\text{lím}}}{4\,(\sigma^{\text{f}})^2\,\delta} = W_{\text{sec}}. \tag{21.8}$$

Los cálculos muestran que, en muchos casos, la influencia de la fuerza longitudinal en (21.8) no es grande y constituye aproximadamente, la siguiente parte del momento flector:

$$A = \frac{N^2_{\text{lím}}}{M_{\text{lím}} 4\sigma^{\text{f}}\delta}. \tag{21.9}$$

Si $N_{\text{lím}}$ y $M_{\text{lím}}$ se expresan en toneladas y metros, δ en cm y σ^{f} en kg/cm^2, entonces, el error relativo del cálculo en el que no se tiene en cuenta la fuerza longitudinal es igual a:

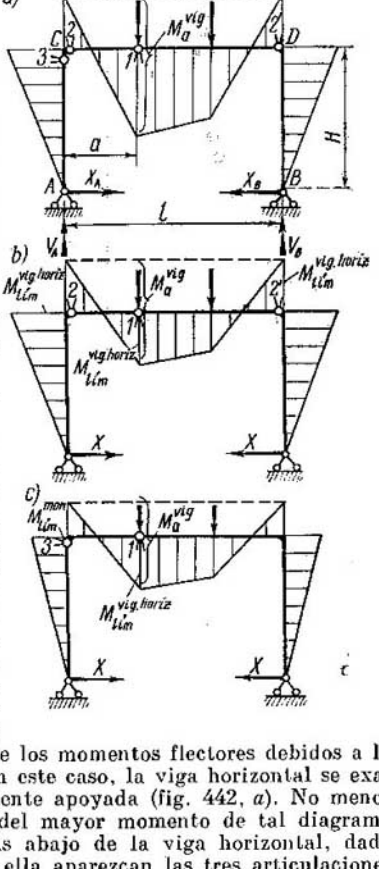
$$A = \frac{N^2_{\text{lím}} \cdot 10}{M_{\text{lím}} 4\sigma^{\text{f}}\delta}. \tag{21.10}$$

Por eso, se puede recomendar iniciar el cálculo con las suposiciones usuales adoptadas, sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales y, luego, determinando aproximadamente el porcentaje de error, hacer más exacto el cálculo teniendo en cuenta la influencia de las fuerzas longitudinales si hay necesidad.

1. PÓRTICO SIMÉTRICO BIARTICULADO

La rotura de un pórtico biarticulado se inicia al aparecer no menos de dos articulaciones plásticas. Por cuanto estas últimas son unilaterales, o sea, se abren hacia un solo lado, entonces, teóri-

Fig. 442



camente, es indispensable que las dos articulaciones se abran hacia lados diferentes: una, hacia adentro del pórtico y, la otra, hacia afuera. Las combinaciones posibles de tales articulaciones pueden ser varias. Todas ellas deben examinarse y al determinar la carga límite, tomar la menor y, al elegir las secciones, las secciones mayores.

Carga vertical sobre la viga horizontal (fig. 442, *a*).

Habiendo carga vertical, las presiones horizontales X_A y X_B son iguales entre sí y, por consiguiente, para una longitud igual de los montantes, son también iguales los momentos flectores en los nudos del pórtico. Ahora, ya no es difícil representarse la forma del diagrama de los momentos flectores en el pórtico. Para esto, es necesario «colgar» de la línea de los momentos de apoyo de la viga horizontal el diagrama de los momentos flectores debidos a la carga aplicada a la misma. En este caso, la viga horizontal se examina como una viga simplemente apoyada (fig. 442, *a*). No menos de la mitad de la ordenada del mayor momento de tal diagrama «colgado» deberá ubicarse más abajo de la viga horizontal, dado que, en el caso de que sobre ella aparezcan las tres articulaciones plásticas, los momentos de apoyo y el momento flector en el tramo deberán ser iguales. Naturalmente que para los siguientes razonamientos, se puede también obtener el diagrama inicial de cálculo del pórtico por el estado elástico, pero es más complicado. Obtenido tal diagrama, no es difícil determinar las posiciones de las articulaciones plásticas y sus posibles combinaciones en el caso de la destrucción del pórtico.

Examinemos un pórtico cuyas barras son de sección constante. En la viga horizontal, la articulación *1* con abertura hacia el interior del pórtico, puede surgir en la sección con mayor momento flector y, las articulaciones 2 y 2′ con abertura hacia afuera del mismo, en sus nudos. Por cuanto la fuerza longitudinal en la viga horizontal es constante y los momentos flectores en los nudos son iguales entre sí, las tres articulaciones surgen al mismo tiempo. En el montante, la articulación plástica *3* puede aparecer sólo en la parte superior en el nudo *C* o *D*, según en qué montante esté situada la mayor fuerza longitudinal. Las posibles variantes de destrucción del pórtico tendrán lugar para las siguientes combinaciones de las articulaciones: $1 + 2 + 2'$ y $1 + 3$.

Primera variante. Las articulaciones plásticas aparecen sólo en la viga horizontal (fig. 442, *b*).

De las construcciones geométricas, $M_a^{\text{vig}} = 2M_{\text{lim}}^{\text{v. hor}}$.

La fuerza longitudinal en la viga horizontal es

$$N_{\text{lim}}^{\text{v. hor}} = \frac{M_{\text{lim}}^{\text{v. hor}}}{H} = \frac{M_a^{\text{vig}}}{2H}.$$

La condición de estado límite es

$$\frac{M_a^{\text{vig}}}{2\sigma^t} + \frac{\left(\frac{M_a^{\text{vig}}}{2H}\right)^2}{4\,(\sigma^t)^2 \delta_{\text{v. hor}}} = W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}}. \qquad (21.11)$$

Segunda variante. Hay articulación plástica en la viga horizontal y en el montante (fig. 442, *c*).

De las construcciones geométricas

$$M_a^{\text{vig}} = M_{\text{lim}}^{\text{v. hor}} + M_{\text{lim}}^{\text{mon}}. \qquad (21.12)$$

Según (21.8):

$$M_{\text{lim}}^{\text{v. hor}} = \left(W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}} - \frac{N_{\text{lim, v. hor}}^2}{4\,(\sigma^t)^2 \delta_{\text{v. hor}}}\right) \delta^t,$$

$$M_{\text{lim}}^{\text{mon}} = \left(W_{\text{sec}}^{\text{mon}} - \frac{N_{\text{lim, mon}}^2}{4\,(\sigma^t)^2\,\delta_{\text{mon}}}\right) \delta^t.$$

Dado que $N_{\text{lim}}^{\text{v. hor}} = \frac{M_{\text{lim}}^{\text{mon}}}{H}$ y $N_{\text{lim}}^{\text{mon}} = V_{\text{máx}}$, donde

$V_{\text{máx}}$ es la reacción mayor, entonces, la condición de estado límite (21.12) toma la forma:

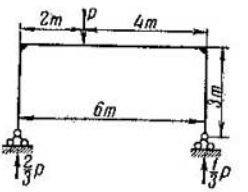
$$M_a^{\text{vig}} = \left[W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}} - \frac{\left(W_{\text{sec}}^{\text{mon}} - \frac{V_{\text{máx}}^2}{4\,(\sigma^t)^2 \delta_{\text{mon}}}\right)^2}{4H^2 \delta_{\text{v. hor}}}\right] \sigma^t + \\ + \left(W_{\text{sec}}^{\text{mon}} - \frac{V_{\text{máx}}^2}{4\,(\sigma^t)^2\,\delta_{\text{mon}}}\right) \sigma^t. \qquad (21.13)$$

Al no considerar las fuerzas longitudinales, las condiciones de estado límite (21.11)—(21.13) se simplifican considerablemente:

$$M_a^{\text{vig}} = W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}} 2\sigma^t, \quad M_a^{\text{vig}} = (W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}} + W_{\text{sec}}^{\text{mon}})\,\sigma^t. \qquad (21.14)$$

Durante el cálculo por el estado teórico límite es necesario tomar en lugar de σ^t, el valor mR.

Fig. 443



Ejemplo 61. Determinar la carga teórica para el pórtico de la fig. 443, cuya sección transversal es en doble te (20·1 + 12·2·2). La resistencia teórica es $mR = 2\,400$ kgf/cm² y, el momento de resistencia, $W_{\text{sec}} = 2\,(12 \cdot 2 \cdot 11 + 10 \cdot 1 \cdot 5) = 628$ cm³.

Al principio, efectuamos el cálculo sin tener en cuenta la fuerza longitudinal. Por (21.14), tenemos que

$$M_a^{\text{vig}} = (628 + 628)\,2\,400 = P\,\frac{200 \cdot 400}{600}, \text{ de donde, } P = 22\,608 \text{ kgf.}$$

Ahora, efectuamos el cálculo tomando en consideración la fuerza longitudinal.

Primera variante. Por (21.11), siendo $M_a^{\text{vig}} = P\,\frac{4}{3}$ kgfm,

$$\frac{400P}{3 \cdot 2} + \frac{400^2 P^2}{9 \cdot 300^2 \cdot 16 \cdot 2\,400} = 2\,400 \cdot 628,$$

de donde obtenemos que $P = 22\,580$ kgf.

Segunda variante. Por (21.13), para $V_{\max} = \frac{2}{3} P$ kgf,

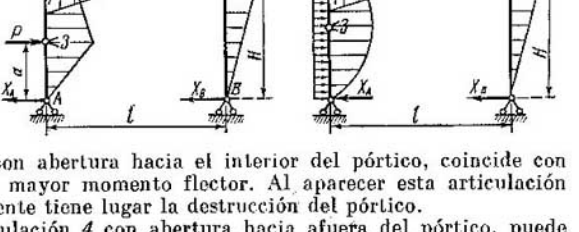
$$\frac{400P}{3} = \left\{2\,400 \cdot 628 - \frac{\left[2\,400 \cdot 628 - \frac{\left(\frac{2P}{3}\right)^2}{4 \cdot 2\,400 \cdot 1}\right]^2}{4 \cdot 300^2 \cdot 1 \cdot 2\,400}\right\} + \left[2\,400 \cdot 628 - \frac{\left(\frac{2P}{3}\right)^2}{4 \cdot 2\,400 \cdot 1}\right].$$

Es necesario resolver esta ecuación por el método de aproximaciones sucesivas, suponiendo que el valor inicial de P, para el segundo miembro, es $P = 22\,608$ kgf, hallado anteriormente, sin haber considerado la fuerza longitudinal. Luego de la precisión, obtenemos que $P = 22\,420$ kgf. De esta manera, en este ejemplo, la consideración de la fuerza longitudinal nos dio una corrección insignificante en el valor de la carga límite determinado sin tomarla en cuenta. Como era de esperar, la carga menor resultó por la segunda variante.

Carga horizontal en el montante (fig. 444).

En la fig. 444 se muestran, en forma aproximada, los diagramas de los momentos flectores para el estado elástico, debidos a las cargas horizontales en el montante izquierdo. Por cuanto las fuerzas longitudinales son constantes a lo largo de cada elemento, entonces, por el diagrama de los momentos flectores se puede determinar la posición probable de las articulaciones plásticas. En la viga horizontal pueden surgir dos articulaciones plásticas al mismo tiempo en los nudos C y D del pórtico: la articulación *1* con abertura hacia el interior del pórtico, en el nudo C, y la 2 con abertura hacia el exterior del pórtico, en el nudo D. En el montante AC, la articulación

Fig. 444



plástica *3* con abertura hacia el interior del pórtico, coincide con el lugar de mayor momento flector. Al aparecer esta articulación por lo corriente tiene lugar la destrucción del pórtico.

La articulación *4* con abertura hacia afuera del pórtico, puede aparecer solamente en la parte superior del montante BD. Las posibles variantes en las ubicaciones de las articulaciones, en el caso de rotura del pórtico son: 1 y 2, *3* y 2, *3* y *4*.

La condición general de estado límite para todas las variantes es:

$$X_A + X_B = P. \tag{21.15}$$

Examinemos todas las variantes, sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales, cuando $M_{\text{lím}} = W_{\text{sec}}\,\sigma^t$.

Primera variante: las articulaciones *1* y 2 (fig. 445, *a*). El momento en la articulación plástica *1* es

$$M_{\text{lím}}^{\text{v. hor}} = W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}}\sigma^t = X_A H - P\,(H - a).$$

El momento en la articulación plástica *2* es

$$M_{\text{lím}}^{\text{v. hor}} = W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}}\sigma^t = X_B H.$$

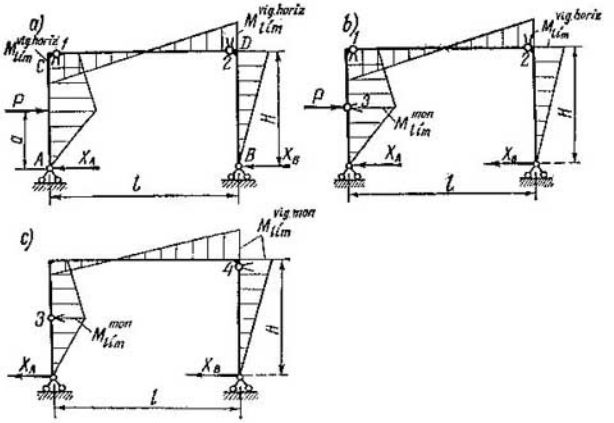
Determinando de ellos X_A y X_B y colocándolas en (21.15), obtenemos que

$$\frac{Pa}{2} = W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}}\sigma^t. \tag{21.16}$$

Segunda variante: las articulaciones *3* y *2* (fig. 445, *b*). El momento en la articulación plástica *3* es

$$M_{\text{lím}}^{\text{mon}} = W_{\text{sec}}^{\text{mon}}\sigma^t = X_A a.$$

Fig. 445



El momento en la articulación plástica *2* es

$$M_{\text{lim}}^{\text{v. hor}} = W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}}\sigma^{t} = X_B H.$$

Determinando de ellos X_A y X_B y colocándolas en (21.15), tendremos que

$$\frac{W_{\text{sec}}^{\text{mon}}\sigma^{t}}{a} + \frac{W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}}\sigma^{t}}{H} = P. \tag{21.17}$$

Tercera variante: Las articulaciones *3* y *4* (fig. 445, *c*). El momento en la articulación plástica *3* es

$$M_{\text{lim}}^{\text{mon}} = W_{\text{sec}}^{\text{mon}}\sigma^{t} = X_A a.$$

El momento en la articulación plàstica *4* es

$$M_{\text{lim}}^{\text{mon}} = W_{\text{sec}}^{\text{mon}}\sigma^{t} = X_B H.$$

También, como anteriormente, colocando X_A y X_B en (21.15), obtenemos que

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{H}\right) W_{\text{sec}}^{\text{mon}}\sigma^{t} = P. \tag{21.18}$$

Ejemplo 62. Determinar la carga teórica P para el pórtico de la fig. 446, si $l = 6$ m, $H = 6$ m, $W_{\text{sec}}^{\text{v. hor}} = 600$ cm³, $W_{\text{sec}}^{\text{mon}} = 300$ cm³, $mR = 2\,000$ kgf/cm² y $a = 3m$.

Por la primera variante, $P = \frac{2}{300} \cdot 600 \cdot 2\,000 = 8\,000$ kgf.

Por la segunda variante, $P = \frac{300 \cdot 2\,000}{300} + \frac{600 \cdot 2\,000}{600} = 4\,000$ kgf.

Por la tercera variante, $P = \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{600}\right) 300 \cdot 2\,000 = 3\,000$ kgf.

Tendremos la menor fuerza para la tercera variante. Hallemos el error relativo sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales para $\delta_{mon} = 1$ cm. Por la expresión (21.9),

$$A = \frac{1\,500^2}{300 \cdot 2\,000 \cdot 4 \cdot 2000 \cdot 1} = 0{,}0005 \text{ ó el } 0{,}05\%.$$

Fig. 446

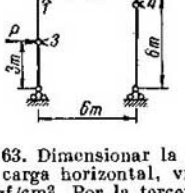


Fig. 447

Ejemplo 63. Dimensionar la sección de los montantes del pórtico de la fig. 447 ante carga horizontal, viga horizontal rígida y una resistencia teórica $mR = 2\,000$ kgf/cm². Por la tercera variante,

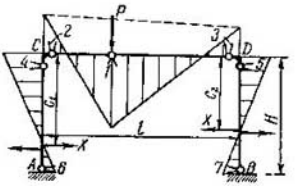
$$W_{sec}^{mon} = \frac{10\,000}{\left(\frac{1}{600} + \frac{1}{600}\right) 2\,000} = 1\,500 \text{ cm}^3.$$

2. PÓRTICO SIMÉTRICO SIN ARTICULACIONES

La rotura de un pórtico sin articulaciones se produce al surgir tres articulaciones plásticas sobre una misma recta que se abren por turno hacia diferentes lados o, no menos de cuatro no dispuestas sobre una misma recta, que se abren también, por turno, hacia diferentes lados.

Al determinar la carga límite, es necesario tomar el menor de aquellos valores de carga que corresponden a las posibles variantes

Fig. 448

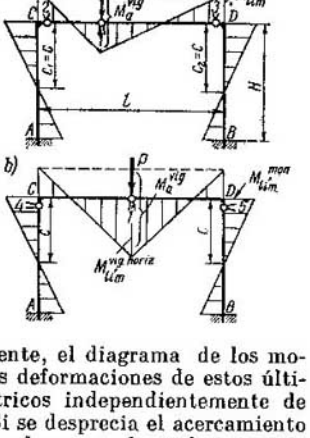


de distribución de las articulaciones en el caso de la rotura del pórtico y, al dimensionar las secciones, las mayores de estas últimas.

Carga vertical sobre la viga horizontal del pórtico (fig. 448). En el caso de carga vertical, las presiones horizontales del pórtico son iguales entre sí. La forma del diagrama de los momentos flectores para el estado elástico se muestra en la fig. 448. Las posibles posiciones de las articulaciones plásticas son: en la viga horizontal, la articulación *1* con abertura hacia adentro del pórtico, en la sección con mayor momento flector y, las *1* y *3* con abertura hacia afuera del pórtico, en sus nudos; en los montantes por sus extremos, las articulaciones *4* y *5*, que se abren hacia afuera del pórtico y las *6*

y *7*, con abertura hacia adentro. La aparición de cuatro articulaciones en los montantes no transforma al pórtico en un sistema variante, por cuanto ellas se abren hacia distintos lados sin sucederse y porque, para un desplazamiento horizontal de la viga horizontal, varias de ellas deberán cerrarse, o sea, prácticamente, dejar de existir. Las posibles variantes de distribución de las articulaciones al destruirse

Fig. 449



el pórtico son: *1*, *2* y *3*; *1*, *4* y *5*. Teóricamente, las articulaciones *4* y *5* se consideran ubicadas en los nudos del pórtico.

Primera variante: las articulaciones *1*, *2* y *3* (fig. 449, *a*).

Cuando los momentos flectores en los nudos del pórtico, en el estado extremo, son idénticos, son también idénticas las presiones horizontales $c_1 = c_2 = c$. Por consiguiente, el diagrama de los momentos flectores en los montantes y las deformaciones de estos últimos en el estado extremo, son simétricos independientemente de la distribución y el valor de la carga. Si se desprecia el acercamiento de los nudos *C* y *D* del pórtico que tiene lugar en el estado extremo, entonces, los extremos superiores de los montantes estarán ubicados en las mismas verticales que los inferiores. Por consiguiente, si en el estado límite del pórtico, los montantes aún trabajan en el estado elástico a todo su largo, entonces, en sus extremos superiores, los momentos flectores serán dos veces mayores que en los inferiores y $c = \frac{2}{3} H$.

Primero entra en estado elástico-plástico la parte superior del montante, por cuanto en ella los momentos flectores son mayores que en la inferior.

En cuanto la parte superior del montante, durante el proceso de carga comience a trabajar en estado elástico-plástico, su rigidez a la flexión irá disminuyendo. Por una propiedad general de los sistemas hiperestáticos, la parte inferior del montante, por ser más rígida, durante el siguiente cargado, recibirá mayores incrementos en los momentos flectores que la superior y el punto cero se desplazará hacia arriba, es decir, $c < \frac{2}{3} H$. El desplazamiento del punto cero continuará hasta el centro del montante, cuando las rigideces de ambas partes sean idénticas.

Pero si el punto cero continuara desplazándose hacia arriba, entonces, los momentos en la parte inferior del montante serían mayores que en la superior y la rigidez de la parte inferior disminuiría y, por consiguiente, en ella habría una menor incrementación en los momentos flectores, es decir, el punto cero se trasladaría hacia abajo.

Así pues, la magnitud c se halla entre los límites $\frac{1}{2}H$ y $\frac{2}{3}H$.

La condición de estado límite del pórtico por la primera variante, es

$$M_a^{\text{vig}} = 2M_{\text{lím}}^{\text{v.hor}}. \tag{21.19}$$

La fuerza longitudinal en la viga horizontal es $N_{\text{lím}}^{\text{v.hor}} = \frac{M_{\text{lím}}^{\text{v.hor}}}{c}$. El momento límite en la articulación plástica por la expresión (21.8), es

$$M_{\text{lím}}^{\text{v.hor}} = \sigma' W_{\text{sec}}^{\text{v.hor}} - \left(\frac{M_{\text{lím}}^{\text{v.hor}}}{c}\right)^2 : 4\sigma' \delta_{\text{v.hor}}.$$

La condición de estado límite es

$$\frac{M_a^{\text{vig}}}{c} = \sigma' W_{\text{sec}}^{\text{v.hor}} - \left(\frac{M_a^{\text{vig}}}{2c}\right)^2 : 4\sigma' \delta_{\text{v.hor}}, \tag{21.20}$$

donde c es un valor indeterminado, que, con nuestras admisiones, se encuentra en el intervalo desde $\frac{1}{2}H$ hasta $\frac{2}{3}H$.

La condición de estado extremo, sin considerar las fuerzas longitudinales, es

$$M_a^{\text{vig}} = 2\sigma' W_{\text{sec}}^{\text{v.hor}}. \tag{21.21}$$

Comparando (21.20) con la expresión análoga para los pórticos biarticulados (21.11) hallamos que, para los pórticos sin articulaciones, teniendo en cuenta las fuerzas longitudinales, la carga vertical límite será un poco menor que la carga límite para los pórticos biarticulados e, igual a ella, al no considerar las fuerzas longitudinales.

Segunda variante: las articulaciones *1*, *4* y *5* (fig. 449, *b*). Por cuanto en el caso de carga simétrica $M_{\text{lím}}$, $N_{\text{lím}}$ y c en los montantes no son iguales entre sí, nos limitaremos a examinar el cálculo con la consideración de las fuerzas longitudinales sólo bajo carga simétrica. En este caso, el cálculo obtenido sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales, también será válido para el cálculo bajo la carga asimétrica.

De las construcciones geométricas (fig. 449, *b*), tenemos que

$$M_a^{\text{vig}} = M_{\text{lím}}^{\text{v.hor}} + M_{\text{lím}}^{\text{mon}}. \tag{21.22}$$

La fuerza longitudinal en la viga horizontal es $N_{\text{lim}}^{\text{v.hor}} = \dfrac{M_{\text{lim}}^{\text{mon}}}{c}$.

La fuerza longitudinal en cada montante es $N_{\text{lim}} = V_a = V_b$, donde V es la reacción de viga.

Por la expresión (21.8), los momentos límites en las articulaciones plásticas son:

$$M_{\text{lim}}^{\text{mon}} = \sigma^f W_{\text{sec}}^{\text{mon}} - V_a^2 : 4\sigma^f \delta_{\text{mon}};$$

$$M_{\text{lim}}^{\text{v.hor}} = \sigma^f W_{\text{sec}}^{\text{v.hor}} - \left(\frac{M_{\text{lim}}^{\text{mon}}}{c}\right)^2 : 4\sigma^f \delta_{\text{v.hor}}.$$

La condición de estado extremo (21.22) toma la forma:

$$M_a^{\text{vlg}} = \left[\sigma^f W_{\text{sec}}^{\text{v.hor}} - \frac{\left(\sigma^f W_{\text{sec}}^{\text{mon}} - \dfrac{V_a^2}{4\sigma^f \delta_{\text{mon}}}\right)^2}{c^2 4\sigma^f \delta_{\text{v.hor}}}\right] + \left(\sigma^f W_{\text{sec}}^{\text{mon}} - \frac{V_a^2}{4\sigma^f \delta_{\text{mon}}}\right), \qquad (21.23)$$

donde c como antes, satisface a la desigualdad $\frac{1}{2} H \leqslant c \leqslant \frac{2}{3} H$. Esta misma fórmula, sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales:

$$M_a^{\text{vlg}} = \sigma^f (W_{\text{sec}}^{\text{v.hor}} + W_{\text{sec}}^{\text{mon}}). \qquad (21.24)$$

Esta expresión conserva también su vigor, para carga asimétrica.

La confrontación de (21.23) — (21.24) con las mismas condiciones para pórticos biarticulados (21.13) — (21.14) muestra que, también, por la segunda variante, la carga vertical límite del pórtico sin articulaciones, para otras condiciones iguales, al considerar las fuerzas longitudinales, es un poco menor que la carga vertical límite del pórtico biarticulado, e igual a ésta, si no se consideran las fuerzas longitudinales.

Ejemplo 64. Determinar la carga límite del pórtico de la fig. 450, si $l = 6$ m, $H = 4$ m, $a = 2$ m, $W_{\text{sec}}^{\text{v.hor}} = 600$ cm^3, $W_{\text{sec}}^{\text{mon}} = 400$ cm^3 y $\sigma^f = 2\,000$ kgf/cm^2.

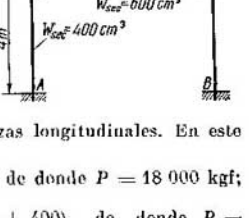


Fig. 450

El cálculo lo hacemos sin considerar las fuerzas longitudinales. En este caso, tenemos:

por la primera variante $\dfrac{P \cdot 2 \cdot 4}{6} 100 = 2 \cdot 2\,000 \cdot 600$, de donde $P = 18\,000$ kgf;

por la segunda variante $\dfrac{P \cdot 2 \cdot 4}{6} 100 = 2\,000\ (600 + 400)$, de donde $P = 15\,000$ kgf.

El error relativo para la articulación plástica en el montante izquierdo, según la expresión (21.9) para $\delta = 1$ cm, es

$$A = \frac{10\,000^2}{2\,000 \cdot 400 \cdot 4 \cdot 2\,000 \cdot 1} = 0{,}015, \text{ ó } 1{,}5\%.$$

Carga horizontal en el nudo del pórtico (fig. 451).

La forma del diagrama de los momentos flectores para el estado elástico y las posibles posiciones de las articulaciones plásticas, se muestran en la

Fig. 451

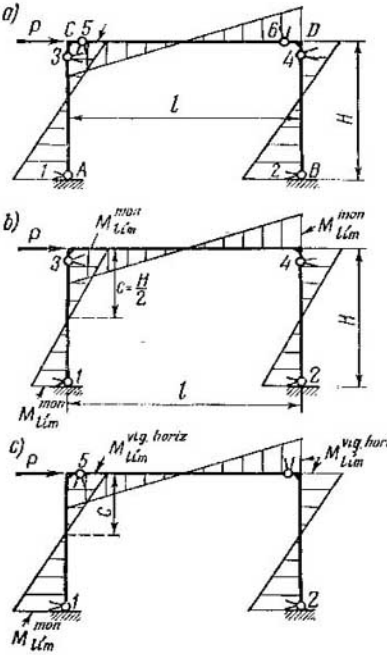


fig. 451, *a*. Los estados límites pueden producirse para las siguientes combinaciones de las articulaciones: *1*, *2*, *3* y *4*; *1*, *2*, *5* y *6*. Para simplificar el cálculo, despreciaremos las fuerzas longitudinales.

Primera variante: las articulaciones *1*, *2*, *3* y *4* (fig. 451, *b*). El punto cero del diagrama de los momentos en los montantes en estado límite estará en el punto medio de sus alturas.

La condición de estado límite es

$$P = \frac{M^{mon}_{lim} + M^{mon}_{lim}}{H} 2 = \frac{4W^{mon}_{sec}\sigma t}{H}. \qquad (21.25)$$

Segunda variante: las articulaciones *1*, *2*, *5* y *6* (fig. 451, *c*). La posición del punto cero del diagrama de los momentos flectores en los montantes es

$$c = \frac{M^{v.hor}_{lim} H}{M^{v.hor}_{lim} + M^{mon}_{lim}}.$$

La condición de estado límite es

$$P = \frac{M^{mon}_{lim} + M^{v.hor}_{lim}}{H} 2 = \frac{2}{H}(W^{mon}_{sec} + W^{v\ hor}_{sec})\,\sigma t. \qquad (21.26)$$

Confrontando (21.25) con (21.18) y (21.26) con (21.17), notaremos que la carga límite horizontal en el nudo *C* del pórtico sin articulaciones es 2 veces mayor que la misma carga para el pórtico biarticulado.

Al hacer los cálculos por el primer estado límite teórico, en todas las expresiones, como antes, en lugar de σ^t es necesario suponer el valor mR.

Ejemplo 65. Determinar la carga límite para el pórtico de la fig. 452, si $W_{sec}^{mon} = 1500$ cm³, $W_{sec}^{v.\,hor} = 600$ cm³, $\sigma^f = 2\,000$ kgf/cm² y $\delta = 1$ cm.

Por la primera variante $P = \frac{4}{600} 1\,500 \cdot 2\,000 = 20\,000$ kgf;

por la segunda variante $P = \frac{2}{600} (1\,500 + 600)\, 2\,000 = 14\,000$ kgf.

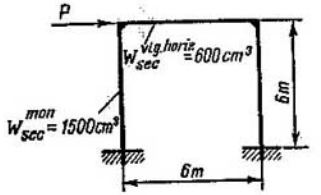


Fig. 452

Determinemos el error relativo por la segunda variante, sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales. Los valores auxiliares son:

$$c = \frac{2\,000 \cdot 600 \cdot 600}{2\,000\,(600 + 1\,500)} = \frac{600}{3{,}5} \text{ cm}, \quad N_{lim}^{mon} = \frac{Pc}{l} =$$

$$= \frac{14\,000 \dfrac{600}{3{,}5}}{600} = 4\,000 \text{ kgf},$$

$$N_{lim}^{v.\,hor} = \frac{P}{2} = \frac{14\,000}{2} = 7\,000 \text{ kgf}$$

El error relativo para el montante y la viga horizontal por la expresión (21.9), es:

$$A_{mon} = \frac{4\,000^2}{2\,000 \cdot 1\,500 \cdot 4 \cdot 2\,000 \cdot 1} = 0{,}0007, \text{ ó el } 0{,}07\%,$$

$$A_{v.\,hor} = \frac{7\,000^2}{2\,000 \cdot 600 \cdot 4 \cdot 2\,000 \cdot 1} \approx 0{,}005 \text{ ó el } 0{,}5\%.$$

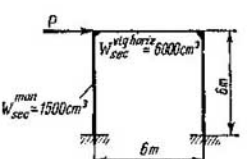


Fig. 453

Ejemplo 66. Determinar la carga teórica para el pórtico de la fig. 453, si $W_{sec}^{mon} = 1\,500$ cm³, $W_{sec}^{v.\,hor} = 6\,000$ cm³, $mR = 2\,0\,0$ kgf/cm², $\delta = 1$ cm.

Por la primera variante $P = \frac{4}{600} 1\,500 \cdot 2\,000 = 20\,000$ kgf.

$$N_{lim}^{mon} = \frac{Pc}{l} = \frac{20\,000 \cdot 3}{6} = 10\,000 \text{ kgf}.$$

El error relativo, sin considerar las fuerzas longitudinales, es

$$A=\frac{10\,000^2}{2\,000\cdot 1\,500\cdot 4\cdot 2\,000\cdot 1}=0{,}0042,\ \text{ó el } 0{,}42\%.$$

3. ARCOS BIARTICULADOS Y SIN ARTICULACIONES

El cálculo de arcos de materiales plásticos por el estado límite, tomando en cuenta las propiedades plásticas del material, es considerablemente más complicado que el de pórticos. La fuerza longitudinal en el arco y, como norma, sus secciones transversales, son variables en toda su longitud, lo que dificulta la determinación de las posiciones de las articulaciones plásticas, las cuales, así como en los pórticos, no son evidentes. Además, en los arcos, la influencia de las fuerzas longitudinales puede ser mayor que en los pórticos. Por eso, en los arcos, el ignorar a las fuerzas longitudinales, puede conducir a grandes errores, particularmente, en los casos, cuando la curva de presión está cerca del eje del arco.

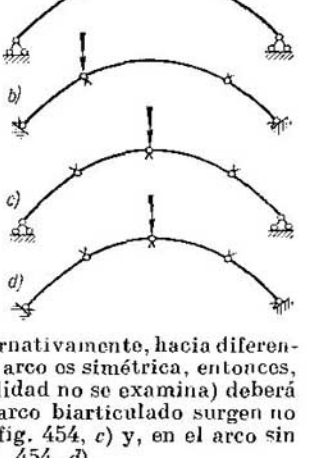


Fig. 454

La rotura del arco biarticulado se produce al aparecer no menos de dos articulaciones plásticas abriéndose hacia diferentes lados (fig. 454, *a*) y, la del arco sin articulaciones, al formarse no menos de cuatro, abriéndose, alternativamente, hacia diferentes lados (fig. 454, *b*). Si la carga sobre el arco es simétrica, entonces, también, su fractura (la pérdida de estabilidad no se examina) deberá ser simétrica, al producirse la cual en el arco biarticulado surgen no menos de tres articulaciones plásticas (fig. 454, *c*) y, en el arco sin articulaciones, no menos de cinco (fig. 454, *d*).

La posición aproximada (y, a veces, también, exacta) de las articulaciones plásticas puede ser señalada por el diagrama de momentos flectores para el estado elástico, particularmente, si en el arco hay momentos flectores de importancia.

Examinemos al arco biarticulado con la fuerza P en el centro del tramo (fig. 455, *a*). La forma aproximada del diagrama de los momentos flectores se muestra en la fig. 455, *b*, en la cual se ve que la articulación plástica con abertura hacia abajo, está ubicada en el punto medio del arco y las articulaciones con abertura hacia arriba, aproximadamente, en los tercios de su luz. Supongamos que sus posiciones nos son conocidas y la articulación izquierda está

ubicada en la sección k. Entonces, podemos expresar a las fuerzas internas de las articulaciones plásticas por medio de la carga.

En el centro del arco $M_{\text{lím}, c} = \frac{Pl}{4} - Xf > 0$ y $N_{\text{lím}, c} = X$, es decir, al empuje horizontal del arco;

en la sección k, $M_{\text{lím}, k} = \frac{P}{2} z - Xy < 0$ y

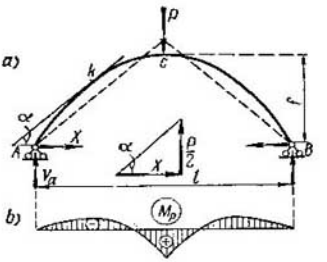
$$N_{\text{lím}, k} = \frac{P}{2} \operatorname{sen} \alpha + X \cos \alpha.$$

Las condiciones de estado límite de las articulaciones plásticas, por la expresión (21.8), son

$$\left(\frac{Pl}{4} - Xf\right) + X^2 : 4\sigma^t \delta_c = W_{\text{sec}, c} \sigma^t; \qquad (21.27)$$

$$\left(Xy - \frac{Pz}{2}\right) + \left(\frac{P}{2} \operatorname{sen} \alpha - X \cos \alpha\right)^2 : 4\sigma^t \delta_k = W_{\text{sec}, k} \sigma^t. \qquad (21.28)$$

Fig. 455



De estas dos expresiones hallamos X y P, ellas serán funciones z de la posición de la articulación en la sección k. Es necesario tomar como carga límite a la menor que satisfaga la condición $\frac{dP}{dz} = 0$.

Si a la articulación ubicada en la sección k le asignamos, aproximadamente, la sección con el mayor momento flector negativo por el cálculo «elástico», entonces,

$$\frac{dM_{\text{lím}, k}}{dz} = \frac{P}{2} - X \frac{dy}{dz} = 0, \text{ de donde } \frac{dy}{dz} = \frac{P}{2H}. \qquad (21.29)$$

Esto significa que la tangente al arco en la sección k, donde está ubicada la articulación, deberá ser paralela a la dirección de la reacción completa en la articulación A (fig. 455).

§ 218. CALCULO DE ARMADURAS. El estado límite de las armaduras se determina por la fluidez de las barras, cuya exclusión de la armadura transforma a ésta en un sistema variante. La fluidez en estas barras puede surgir o simultáneamente o, con más frecuencia, en forma **sucesiva**. Si la fluidez surge en forma sucesiva, entonces, el estado límite llega al aparecer ésta en la primera barra **indispen-**

sable de la armadura obtenida de la dada al quitarle las barras superfluas que se encuentran en estado de fluidez.

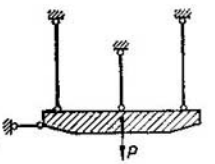
De esta manera, si la armadura posee barras indispensables y superfluas, su estado límite puede comenzar ante la fluidez de algunas de sus n_0 barras superfluas y obligadamente de una indispensable, lo cual corresponde al estado que precede al estado límite de la armadura dada. El número n_0 de barras satisface a las desigualdades $0 \leqslant n_0 \leqslant n$, donde n es el número de barras superfluas en la armadura dada.

Si $n_0 = 0$, entonces, el estado límite comienza, simultáneamente, con el inicio de la fluidez en una barra **indispensable** de la armadura dada.

Si $n_0 = n$, entonces, el estado límite comienza con el inicio de la fluidez en todas las barras superfluas y una indispensable.

Si $0 < n_0 < n$, entonces, el estado límite llega cuando comienza la fluidez no en todas las barras superfluas. En este caso, como ya fue

Fig. 456



señalado, la última barra en que comenzó la fluidez era **indispensable** en la armadura, la cual corresponde al estado que precede al estado límite en la armadura dada.

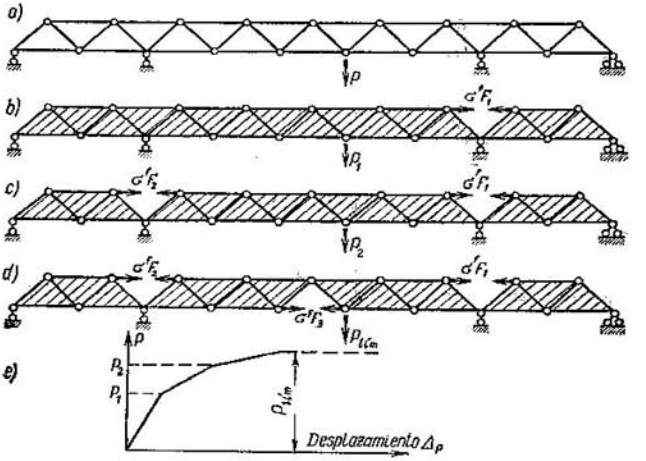
La carga límite puede ser determinada por medio de diferentes procedimientos, por ejemplo, examinando el equilibrio al inicio de la rotura de las armaduras, para diferentes formas de rotura, con otras palabras, del examen del equilibrio de las diferentes armaduras variantes obtenidas de la dada con la exclusión de algunas barras, cuyas acciones sobre la armadura se sustituyen por fuerzas externas aplicadas en los nudos de la misma e iguales a la fuerza longitudinal de estas barras en estado de fluidez. De todas las cargas límites obtenidas es necesario elegir la menor.

Por cuanto las formas de rotura que corresponden a los estados límites, incluso en los casos simples, son muchas, tal vía es utilizable sólo, cuando por cualesquiera síntomas es conocida la forma de rotura para la carga menor.

Por ejemplo, la forma de rotura del sistema mostrado en la fig. 456, cuyas barras son traccionadas, es evidente. La rotura ocurrirá como resultado del inicio de la fluidez en todas las barras (péndolas) y, su forma corresponderá a un asentado simétrico de la viga rígida. De la condición de equilibrio tendremos que

$$P_{\text{lim}} = \sigma^{t} 3F.$$

Fig. 457



Si la forma de rotura no es evidente, entonces, el procedimiento será demasiado voluminoso, puesto que es necesario efectuar muchos análisis de diferentes sistemas inestables. Además, no siempre queda en claro si la barra eliminada de la armadura trabaja a la compresión o a la tracción. En tal caso, es más seguro, aunque también trabajoso, el procedimiento de cálculo sucesivo de la armadura, como sistema elástico que va perdiendo algunos vínculos con el aumento de la carga.

La esencia de este procedimiento consiste en que, al principio, la armadura se calcula como un sistema elástico bajo la carga determinada por el parámetro de la magnitud incógnita. El cálculo determina la barra más tensionada, donde antes que nada surge la fluidez. Igualando la tensión en ella al límite de fluidez, encontramos el parámetro de carga P_1, correspondiente al inicio de dicha fluidez en esta barra (fig. 457). A continuación, la barra se excluye de la armadura y su acción se sustituye por fuerzas externas iguales a la fuerza longitudinal límite en esta barra. El grado de indeterminación estática de la armadura disminuye en una unidad (fig. 457, *b*). Luego, se efectúa el cálculo de esta nueva armadura y se determina la segunda barra, excluyéndola del trabajo al comenzar la fluidez. De tal modo será determinado el parámetro de carga P_2, correspondiente al inicio de la fluidez de la segunda barra. Y así sucesivamente, hasta que la armadura no se torne variante. Entonces precisamente, será hallada la carga límite para la armadura.

Conviene prestar particular atención en la posibilidad de flexión lateral de las barras comprimidas de la armadura, antes de la apari-

ción de la fluidez por toda la sección transversal, puesto que en este caso, la fuerza de resistencia de la barra será menor que $\sigma' F$. Si la flexión lateral ocurre en el estado elástico, entonces, con su incremento, el valor teórico de la fuerza de resistencia aumenta un poco. En los cálculos de práctica podemos no tomar en cuenta esto y suponer que la fuerza de resistencia es igual a la de Euler.

Si la flexión lateral va acompañada de fluidez, entonces, el incremento de la fuerza de resistencia de la barra puede cesar rápidamente, después de lo cual, comienza a decrecer.

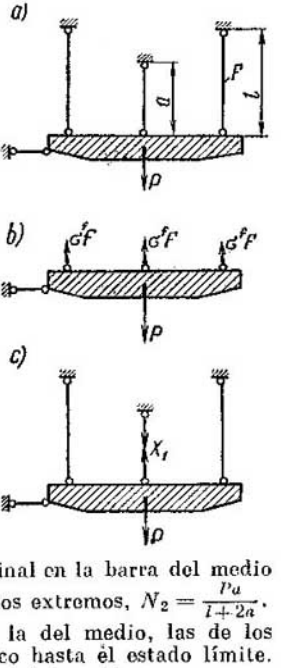
Todo lo expuesto, habla de la complejidad del problema de determinación de la carga límite para las armaduras hiperestáticas, particularmente, en aquellos casos, en que las barras comprimidas quedan fuera de servicio a causa de su flexión lateral. Aquí no se examina el cálculo de flexión lateral de las barras de las armaduras y, si se menciona este fenómeno, es por estar relacionado con la determinación de las cargas límites.

Si la armadura está hecha de materiales frágiles, lo que es irracional, su rotura está ligada con la de n_0 barras superfluas y una, la última, indispensable en tal armadura, correspondiente al estado que antecede a la destrucción de la armadura dada. En el caso de la rotura gradual de las barras de una armadura es indispensable encontrar equélla que, en el estado elástico, esté más tensionada y será la primera en romperse. Dado que su rotura ocurre en forma casi instantánea, es indispensable tener en cuenta el efecto dinámico que acompaña a la desaparición de la fuerza longitudinal en la barra. La rotura de esta primera barra puede ser causa por el primer estado límite del sistema. Si después de la rotura de la primera barra, la parte restante de la armadura no se destruyó bajo la acción de la carga y el efecto dinámico que acompaña a la desaparición de la fuerza longitudinal en la barra, entonces, la carga que actúa sobre la armadura aún no es de rotura. Los cálculos siguientes para determinar la carga destructiva se efectúan en el mismo orden expuesto más arriba.

§ 219. DESCARGA Y TENSIONES Y DEFORMACIONES REMANENTES. Las tesis fundamentales sobre la descarga y las tensiones y deformaciones remanentes fueron examinadas en el capítulo X. Ellas, con algunos suplementos, pueden ser también empleadas para los sistemas hiperestáticos.

En los sistemas hiperestáticos, casi siempre, con raras exclusiones, las deformaciones remanentes van acompañadas de tensiones remanentes en las secciones de las barras y, el diagrama de dichas tensiones no será autoequilibrado, como en los sistemas estáticamente determinados. La cuestión reside en que, después de la descarga de un sistema hiperestático que trabaja fuera del límite de elasticidad, como norma, surgen fuerzas internas remanentes. En esto consiste la diferencia entre la descarga de los sistemas hiperestáticos y la de los sistemas estáticamente determinados.

Fig. 458



Por ejemplo, en los sistemas isostáticos, la ley lineal de descarga en el diagrama P, Δ, es siempre válida para los sistemas que trabajan bajo fuerzas longitudinales (las armaduras) y las vigas cuya sección es simétrica con respecto a la línea neutra. En los sistemas hiperestáticos esto no ocurre siempre. Mostrémoslo.

Examinemos un sistema que trabaja bajo fuerzas longitudinales (fig. 458, *a*). En la fig. 458, *b* se muestra su estado límite, del cual obtenemos que

$$P_{\text{lím}} = 3\sigma^t F.$$

En el cálculo por el estado elástico, con el sistema básico representado en la fig. 458, *c*, la fuerza longitudinal en la barra del medio es $N_1 = X_1 = \frac{Pl}{l+2a}$ y, en las barras de los extremos, $N_2 = \frac{Pa}{l+2a}$. Para $a < l$, la barra más tensionada es la del medio, las de los extremos se mantendrán en estado elástico hasta el estado límite.

Las tensiones remanentes en la barra del medio son

$$\Delta\sigma = -\frac{3\sigma^t l}{l+2a} + \sigma^t.$$

Para $a \geqslant \frac{l}{4}$, $\Delta\sigma > -\sigma^t$, las tensiones remanentes de compresión son menores que el límite de fluidez y, para $a < \frac{l}{4}$, mayores. Esto significa que, para $a \geqslant \frac{l}{4}$, la descarga transcurrirá por ley lineal y, para $a < \frac{l}{4}$, al principio, por ley lineal en estado elástico, y luego, por ley lineal en estado elástico-plástico, por cuanto, al final de la descarga, la barra del medio se encontrará en estado elástico.

Examinemos, ahora, la viga continua de la fig. 459. Los diagramas de los momentos flectores de la carga y descarga se muestran en la fig. 459, *a*, *b*. La carga límite es $P_{\text{lím}} = \frac{6\sigma^t W_{\text{sec}}}{l}$.

El momento flector en la sección del medio del primer tramo, ante la acción de la fuerza descargadora P_{lim} es

$$M = -\frac{13}{64}\, l\, \frac{6\sigma^t W_{\text{sec}}}{l} \approx -1{,}22\sigma^t W_{\text{sec}}.$$

La tensión remanente en los puntos de borde de esta sección es

$$\Delta\sigma = \mp \frac{M}{W} \pm \sigma^t = \mp \sigma^t \left(1{,}22\frac{W_{\text{sec}}}{W} - 1\right).$$

Para una sección rectangular $\Delta\sigma = \pm \sigma^t\,(1{,}22 \cdot 1{,}5 - 1) = \mp 0{,}83\sigma^t$.

Para una sección circular $\Delta\sigma = \mp \sigma^t\,(1{,}22 \cdot 1{,}7 - 1) = \mp 1{,}074\sigma^t$.

La sección se encontrará en condiciones más favorables en el apoyo. Por consiguiente, para una sección rectangular, la ley lineal

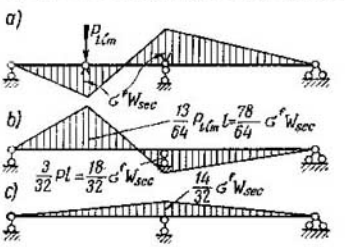


Fig. 459. Diagramas de los momentos flectores M

a—durante la carga; b—durante la descarga; c—remanente

de descarga, es válida, pero, para una circular, no. En la misma viga (fig. 460), pero bajo otra carga, las tensiones remanentes mayores estarán en la sección sobre el apoyo. En este caso $\Delta\sigma = \pm \sigma^t \left(1{,}125\,\frac{W_{\text{sec}}}{W} - 1\right)$. Para una sección circular $\Delta\sigma = \pm 0{,}916\sigma^t$ y, para una rectangular $\Delta\sigma = \pm 0{,}685\,\sigma^t$. Esto significa que en el caso de tal carga la ley lineal de descarga será válida para ambas secciones.

Sigamos ahora el desarrollo de los desplazamientos y las tensiones durante la carga consecutiva del sistema y su descarga. Para simplificar los razonamientos, examinemos el sistema presentado en la fig. 458.

Primera carga. Al principio, el asentado Δ de la viga rígida es proporcional a la carga P, hasta la aparición de la tensión σ^t en la barra del medio. A este estado le corresponde la fuerza P_1, determinada de la expresión

$$N_1 = \sigma^t F = \frac{P_1 l}{l + 2a}, \text{ de donde } P_1 = \frac{\sigma^t F\,(l - 2a)}{l}. \qquad \text{(a)}$$

Después de esto, desconectamos del trabajo a la barra del medio, conservando constante el valor de la fuerza longitudinal $\sigma^t F$ en ella. En este caso, las fuerzas longitudinales en las barras de los extremos se determinan por la expresión

$$N_2 = \frac{P_1 a}{l + 2a} + \frac{P - P_1}{2} = \frac{P - \sigma^t F}{2}. \qquad \text{(b)}$$

Las barras de los extremos sólo alcanzan el límite de fluidez en el estado límite, por lo que trabajarán en estado elástico. Por eso, el asentado de la barra rígida se determina por la expresión

$$\Delta = \frac{N_2 l}{EF}. \tag{c}$$

La barra del medio recibe deformaciones plásticas y las de los extremos trabajan en estado elástico. Por esta razón, durante la descarga aparecerán tensiones remanentes de compresión en la barra del medio ($-\Delta\sigma$) y de tracción en las de los extremos $\frac{(+\Delta\sigma)}{2}$, a consecuencia de lo cual, el sistema recibe un endurecimiento.

La descarga del sistema puede ser examinada como su carga, con la fuerza $R = P_{límite}$ dirigida hacia arriba. El sistema, al principio, trabaja como si fuera elástico. Las fuerzas longitudinales resultantes en las barras son iguales a: en la barra del medio

$$N_1 = \sigma^f F - \frac{R_1}{l+2a} \geqslant -\sigma^f F;$$

en las barras de los extremos

$$N_2 = \frac{P - \sigma^f F}{2} - R\frac{a}{l+2a}. \tag{d}$$

El límite de descarga en estado elástico se determina de la igualdad

$$\sigma^f F - \frac{R_1 l}{l+2a} = -\sigma^f F, \text{ de donde}$$

$$R_1 = \frac{2\sigma^f F (l+2a)}{l}. \tag{e}$$

Las tensiones remanentes en la barra del medio durante la descarga en estado elástico, serán

$$\Delta\sigma = \frac{N_1}{F} = \sigma^f - \frac{Rl}{F(l+2a)}. \tag{f}$$

En los casos cuando $R > R_1$, la descarga se efectúa en estado elástico-plástico, durante el cual, las barras de los extremos trabajan en estado elástico y, la del medio, en estado de fluidez. En este caso, la tensión remanente es $\Delta\sigma = -\sigma^f$, la fuerza longitudinal en la barra del medio, $N_1 = -\sigma^f F$ y, en la del extremo,

$$N_2 = \frac{P - \sigma^f F}{2} - \frac{R_1 a}{l+2a} - \frac{(R - R_1)}{2} = \frac{P - \sigma^f F}{2} - \frac{R - 2\sigma^f F}{2}. \tag{g}$$

La esencia del fenómeno de endurecimiento del sistema consiste en que para obtener fluidez en la barra del medio después de la descarga, al cargarla de nuevo, es necesario crear en ella la tensión σ^*:

$$\sigma^* = \sigma^f - (-\Delta\sigma) = \sigma^f + \Delta\sigma. \tag{h}$$

En este caso, la carga adquiere el nuevo valor P_1^*, hasta el cual la carga transcurrirá en estado elástico

$$P_1^* = (\sigma^f + \Delta\sigma) F \frac{l+2a}{l}. \tag{i}$$

Los razonamientos ulteriores los acompañaremos con cálculos. Al principio, examinemos el caso cuando la descarga se lleva a cabo dentro del estado elástico. Para esto es necesario suponer que $a > \frac{l}{4}$. Adoptamos los siguientes valores: $l = 6$m, $a = 3$m, $F = 1$ cm², $\sigma^f = 2\,000$ kgf/cm² y $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm². La flexión longitudinal se excluye del examen.

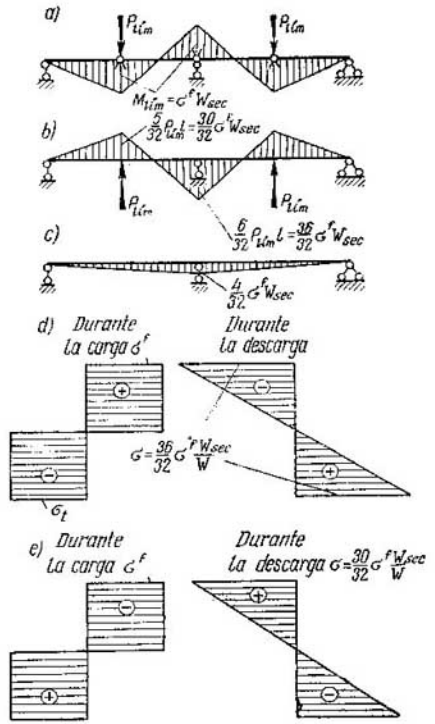


Fig. 460. Diagramas de momentos flectores y tensiones normales

a – diagrama de momentos flectores durante la carga; *b* – ídem, durante la descarga; *c* – ídem, remanente; *d* – diagramas de tensiones en el apoyo del medio; *e* – ídem, en el punto medio del frame 2 000 000·1

Primera carga. El valor de la carga para el límite de fluencia se halla por la expresión (a)

$$P_1 = \frac{2\,000 \cdot 1 (600 + 2 \cdot 300)}{600} = 4\,000 \text{ kgf.}$$

La fuerza longitudinal en la barra del extremo, por la expresión (b), es

$$N_2 = \frac{4\,000 - 2\,000 \cdot 1}{2} = 1\,000 \text{ kgf.}$$

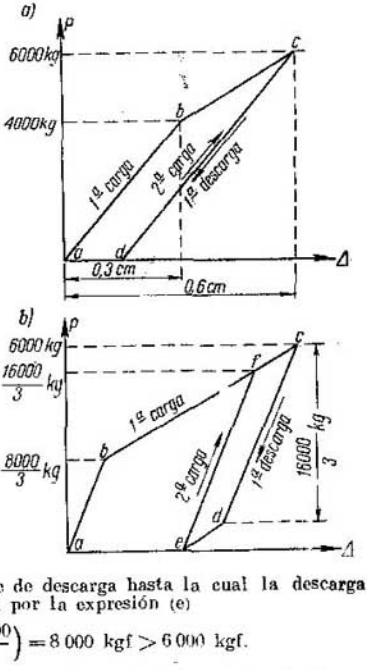
El asentado de la viga rígida, para $P = P_1$, por la expresión (c) es

$$\Delta_1 = \frac{1\,000 \cdot 600}{2\,000\,000 \cdot 1} = 0{,}3 \text{ cm.}$$

En la segunda fase de carga la barra del medio se desconecta del trabajo. El asentado de la viga rígida, por las expresiones (b) y (c) (fig. 461, *a*), es

$$\Delta = \frac{6\,000 - 2\,000 \cdot 1}{2} \cdot \frac{600}{2\,000\,000 \cdot 1} = 0{,}6 \text{ sm.}$$

Fig. 461



Primera descarga. La carga límite de descarga hasta la cual la descarga se efectúa por ley lineal, se determina por la expresión (e)

$$R_1 = 2 \cdot 2\,000 \cdot 1 \left(\frac{600 + 2 \cdot 300}{600}\right) = 8\,000 \text{ kgf} > 6\,000 \text{ kgf}.$$

Esto significa que la descarga tendrá lugar en el estado elástico. La fuerza longitudinal N_2 en la barra extrema después de la descarga se halla por la expresión (d)

$$N_2 = \frac{6\,000 - 2\,000 \cdot 1}{2} = 6\,000 \frac{300}{600 + 2 \cdot 300} = 500 \text{ kgf}.$$

El asentado remanente de la viga rígida es $\Delta_{rem} = \frac{500 \cdot 600}{2\,000\,000 \cdot 1} = 0{,}15$ cm. Las tensiones remanentes en la barra del medio, por la expresión (f), son

$$\Delta\sigma = 2\,000 - \frac{6\,000 \cdot 600}{1\,(600 + 2 \cdot 300)} = -1\,000 \text{ kgf/cm}^2.$$

Segunda carga. El nuevo peso, para el límite de fluencia lo hallamos por la expresión (i)

$$P_1^* = (2\,000 + 1\,000)\,1 \frac{600 + 2 \cdot 300}{600} = 6\,000 \text{ kgf}.$$

Por lo tanto el diagrama de la segunda carga coincide con el de descarga $d - c$ (fig. 461, *a*). En adelante, durante la carga y descarga, el sistema se comportará como si fuera elástico.

Ahora examinemos el sistema para $a = 1\ \text{m} < \frac{1}{4} l$. En este caso, como veremos más adelante, la descarga tendrá lugar en estado elástico-plástico.

Primera carga. La carga, para el límite de influencia, por la expresión (a), es

$$P_1 = \frac{2\,000 \cdot 1\,(600 + 2 \cdot 100)}{600} = \frac{8\,000}{3}\ \text{kgf}\ \text{(fig. 461, } b\text{)}.$$

El asentado de la barra rígida, para $P = P_1$, por las expresiones (b) y (c), es

$$\Delta = \frac{(8\,000 : 3 - 2\,000 \cdot 1)}{2} \cdot \frac{600}{2\,000\,000 \cdot 1} = 0{,}1\ \text{cm}.$$

Como antes, la carga límite es $P_{\text{lim}} = 6\,000$ kgf. Para esta carga, el asentado completo de la viga rígida, es $\Delta = 0{,}6$ cm.

Primera descarga. La fuerza límite de descarga, hasta la que la descarga se efectúa por ley lineal, por la expresión (e), es

$$R_1 = \frac{2 \cdot 2\,000 \cdot 1\,(600 + 2 \cdot 100)}{600} = \frac{16\,000}{3}\ \text{kgf},$$

o sea, menor de 6 000 kgf. Esto significa que la descarga total tendrá lugar efectivamente, en estado elástico-plástico. El asentado de la viga rígida en el momento cuando la descarga alcanza el límite de fluidez, para $P = P - R_1$ lo hallamos así:

$$N_2 = \frac{6\,000 - 2\,000 \cdot 1}{2} - \frac{\frac{16\,000}{3} - 2 \cdot 2\,000 \cdot 1}{2} = \frac{4\,000}{3}\ \text{kgf},$$

$$\Delta = \frac{4\,000 \cdot 600}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0{,}4\ \text{cm}.$$

El asentado remanente de la viga rígida después de la descarga completa, por (g) y (h), es

$$N_2 = \frac{6\,000 - 2\,000 \cdot 1}{2} - \frac{6\,000 - 2 \cdot 2\,000 \cdot 1}{2} = 1\,000\ \text{kgf},$$

$$\Delta = \frac{1\,000 \cdot 600}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0{,}3\ \text{cm}.$$

Las tensiones remanentes en la barra del medio son

$$\Delta\sigma = -\sigma^f \text{ y, entonces, } \sigma^* = 2\sigma^f.$$

Segunda carga. La carga para el límite de fluencia, por la expresión (i), es

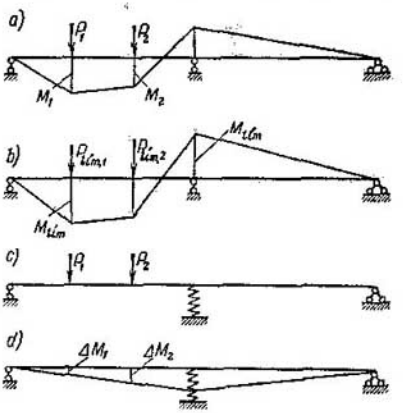
$$P_1^* = 2 \cdot 2\,000 \cdot 1\,\frac{(600 + 2 \cdot 100)}{600} = \frac{16\,000}{3}\ \text{kgf}.$$

Este valor de P_1 corresponde al punto f, situado sobre la recta bc de la primera carga. El diagrama de la segunda sobre la parte fc, a la derecha del punto f, coincide con el diagrama de la primera carga. Durante la descarga y carga reiteradas, el valor de desplazamiento de la viga rígida no aumenta, pero, cada ciclo de carga y descarga forma un lazo de histéresis que influye sobre la resistencia del material.

Hemos examinado los diagramas de carga y descarga en un ejemplo particular, pero, éstos son también característicos para otros casos. No es difícil mostrar que de comenzar la descarga desde el punto f (fig. 461, b) o a la izquierda de él, entonces, la descarga transcurrirá por ley lineal.

§ 220. INFLUENCIA DE LA ELASTICIDAD Y LAS DISLOCACIONES DE LOS APOYOS EN EL VALOR DE LA CARGA LIMITE. Examinemos la viga continua de dos tramos de la fig. 462, *a*, bajo la acción de las fuerzas P_1 y P_2. Supongamos que en el estado elástico, el momento flector bajo la fuerza P_1 es mayor que bajo

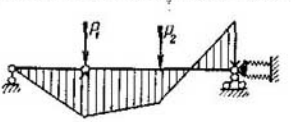
Fig. 462



la P_2. La primera articulación plástica surge debajo de la fuerza P_1 y, la segunda, sobre apoyo (fig. 462, *b*).

Supongamos que el apoyo del medio es elástico (fig. 462, *c*). A causa de su elasticidad, al diagrama de momentos flectores de la

Fig. 463



viga sobre apoyos rígidos (fig. 462 *a*) se le suma el de momentos por la fig. 462, *d*. No obstante, esto no modifica la carga límite. El asunto consiste en que, en el estado límite, el primer tramo de la viga se transforma en un sistema variante y el diagrama de $M_{\text{lim}}^{\text{vig}}$ deberá ser inscrito en la figura limitada, por arriba, con la de los momentos límites negativos y, por abajo, por las de los positivos (fig. 463, *b*). Esto únicamente puede ser hecho de una sóla manera. Por consiguiente, a pesar del diagrama de momentos complementario, debido a la elasticidad del apoyo, la posición de la articulación plástica no varía. Se podrían efectuar razonamientos análogos para la viga con empotramientos elásticos (fig. 465). Por consiguiente, la *carga límite no depende de la elasticidad de los apoyos*. Igualmente se puede demostrar que la carga límite no depende

de las tensiones propias de los sistemas hiperestáticos ni de las originadas por distintas causas, por ejemplo, por la acción de la temperatura, de la fabricación inexacta de los elementos del sistema, etc.

§ 221. CALCULO DE DIFERENTES CARGAS REPETIDAS Y ALTERNADAS

1. ACCIÓN REITERADA DE UNA MISMA CARGA

La acción reiterada de una misma carga sobre los sistemas isostáticos fue detalladamente examinada en el capítulo 10. Todo lo expuesto en dicho capítulo, en principio, también es válido para los sistemas hiperestáticos. Recordemos la deducción fundamental, de que la fatiga del material disminuye la carga límite determinada por su acción simple, no repetida.

2. ACCIÓN REITERADA DE DIFERENTES CARGAS ALTERNADAS

El cálculo de las estructuras a las cargas reiteradas con diferentes cargas alternadas es mucho más complicado que el cálculo bajo una sola carga reiterada. La particularidad de la acción consecutiva de diferentes cargas alternadas es que, en aquellos casos cuando cada una de ellas por separado actuando reiteradamente, no origina

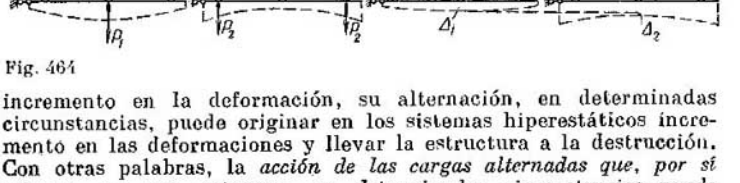


Fig. 464

incremento en la deformación, su alternación, en determinadas circunstancias, puede originar en los sistemas hiperestáticos incremento en las deformaciones y llevar la estructura a la destrucción. Con otras palabras, la *acción de las cargas alternadas que, por sí mismas, no son extremas, en determinadas circunstancias puede destruir la estructura.*

La rotura de una estructura a causa de la acción consecutiva de diversas cargas, ocurre como consecuencia del incremento de las deformaciones y tensiones remanentes. Las últimas, no están autoequilibradas en la sección, como en los sistemas isostáticos. Para imaginarse el carácter de la rotura de una estructura con cargas que actúan en forma consecutiva, examinemos una viga elástica colgada de tres barras (fig. 464). A la viga le aplicaremos consecutivamente la fuerza P_1 en el nudo del medio, y dos fuerzas iguales P_2, en los nudos extremos.

Supongamos que en ambos casos de carga la viga trabaja elásticamente y las barras pasan por turno al estado plástico: la del medio,

al cargarla con la fuerza P_1 y, las de los extremos, al cargarlas con las P_2.

Después del primer cargado con la fuerza P_1, en la barra del medio se produce un alargamiento remanente, a consecuencia de lo cual, al descargarla, surgen en ella tensiones de compresión remanentes y, en las barras de los extremos, tensiones de tracción remanentes. A continuación, cargamos al sistema con las fuerzas P_2. La barra central comprimida se descargará y el nudo del medio se asentará.

Como resultado de la fluidez, las barras de los extremos reciben alargamientos remanentes y la del medio trabajará en estado elástico.

Durante la descarga, en la barra del medio surgen tensiones remanentes de tracción y, en las de los extremos, de compresión, después de lo cual, la viga tendrá convexidad hacia arriba.

Una nueva carga con la fuerza P_1 descargará las vigas de los extremos, como resultado de lo cual los nudos de los extremos, encontrándose en estado elástico, se asentarán y, el del medio se asentará más aún, ya que la barra central se encuentra en estado de fluidez.

Después de la descarga, la barra del medio sufre de nuevo compresión y las de los extremos, tracción.

Como se ve, después del primer ciclo de carga, la viga se desplazó hacia abajo. Este desplazamiento se prolongará, hasta que los alargamientos de las barras no lleguen a ser límites y éstas se rompan.

En otras condiciones, el aumento sucesivo del alargamiento de las barras puede cesar antes de que ellas alcancen los valores límites y, entonces, el sistema comenzará a trabajar como elástico.

Para que la estructura no se rompa bajo la acción de las cargas alternadas de cálculo, es indispensable que las deformaciones dejen de crecer. La condición de limitación de las deformaciones puede ser expresada por medio del siguiente teorema (de Bleich): si se puede encontrar tal diagrama de tensiones remanentes que, en unión con la acción de cada una de las cargas posibles del sistema produzca tensiones que en ningún sitio superen los límites de fluidez, entonces, las deformaciones del sistema serán limitadas para cualquier cantidad de cargas y cualquier sucesión en su aplicación por separado [15].

Al apreciar la resistencia de la estructura, en el caso de un gran número de reiteraciones de la carga, deberán ser considerados los fenómenos de fatiga en el material.

Los pormenores se exponen en [14] y [15].

CAPITULO XXII * CALCULO DE SISTEMAS ESPACIALES HIPERESTATICOS

§ 222. OBSERVACIONES GENERALES. El cálculo de los sistemas espaciales hiperestáticos se efectúa sobre la base de las mismas ideas con las cuales se fundamentó el de los sistemas planos hiperes-

táticos. Por eso, todos los métodos de cálculo de los sistemas planos pueden ser extendidos a los espaciales, sin ninguna variación de principio.

No obstante, el cálculo de los sistemas espaciales es considerablemente más complicado que el de los planos. Por esta razón, su cálculo se sustituye, frecuentemente, por el de sistemas planos en los que los sistemas espaciales se descomponen. En este caso, claro está, en el resultado de cálculo se introducen algunos errores.

El cálculo de los sistemas espaciales se hace más complicado por dos causas:

1) el número de incógnitas básicas, por el método de fuerzas y desplazamientos, es considerablemente mayor en los sistemas espaciales que en los planos;

2) por cuanto el número de distintas fuerzas internas es mayor en las barras de los sistemas espaciales que en las de los planos, entonces, el cálculo de todas las magnitudes dependientes de la deformación de las barras es mucho más complicado.

Extendamos los métodos básicos de cálculo de los sistemas planos, detalladamente expuestos más arriba, al de los espaciales y señalemos las particularidades de los métodos para tales sistemas.

§ 223. CALCULO DE SISTEMAS ESPACIALES POR EL METODO DE FUERZAS. El número de incógnitas básicas del método de fuerzas se puede determinar por las fórmulas de las correlaciones cuantitativas entre los cuerpos y los vínculos de los sistemas espaciales examinados en el capítulo 12. Sin embargo, es más cómodo y seguro determinarlas directamente, transformando el sistema dado en básico.

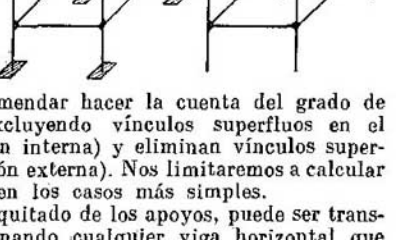


Fig. 465

En este caso, se puede recomendar hacer la cuenta del grado de indeterminación estática excluyendo vínculos superfluos en el sistema libre (indeterminación interna) y eliminan vínculos superfluos de apoyo (indeterminación externa). Nos limitaremos a calcular la indeterminación estática en los casos más simples.

El sistema de la fig. 465, quitado de los apoyos, puede ser transformado en isostático seccionando cualquier viga horizontal que elimine seis vínculos (fig. 465, *b*). Por consiguiente, el grado de indeterminación interna del sistema es igual a seis. Los vínculos de apoyo en el sistema son $4 \cdot 6 = 24$, de ellos, son superfluos, $24 - 6 = 18$. Por consiguiente, el grado de indeterminación externa

del sistema es igual a 18 y, el de indeterminación estática completa, a 24.

Se sobreentiende que, como en los sistemas planos, al formar el sistema básico, no es obligatorio eliminar todos los vínculos superfluos externos. En lugar de eso, se pueden excluir complementariamente, vínculos internos, a excepción de los que corresponden a la indeterminación interna del sistema. Como se sabe, eliminar vínculos complementarios externos a cambio de los internos es imposible.

El sistema mostrado en la fig. 466 se diferencia del examinado en que, en él, los vínculos de apoyo superfluos son $12 - 6 = 6$. Por eso, su grado de indeterminación estática es igual a 12.

Fig. 466

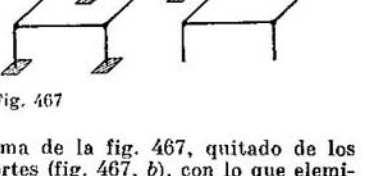


Fig. 467

Para hacer isostático al sistema de la fig. 467, quitado de los apoyos, es necesario efectuar 5 cortes (fig. 467, *b*), con lo que eleminamos $6 \cdot 5 = 30$ vínculos. Los vínculos de apoyo superfluos, igual que en el sistema representado en la fig. 465, son 18; el grado de indeterminación estática de este sistema es igual a 48.

Lo más simple para determinar el grado de indeterminación estática de las armaduras es emplear la fórmula

$$n = B + V_{ap} - 3N, \tag{22.1}$$

donde B es el número de barras de la armaduras, V_{ap}, el número de vínculos de apoyo y N, el número de nudos de las armaduras.

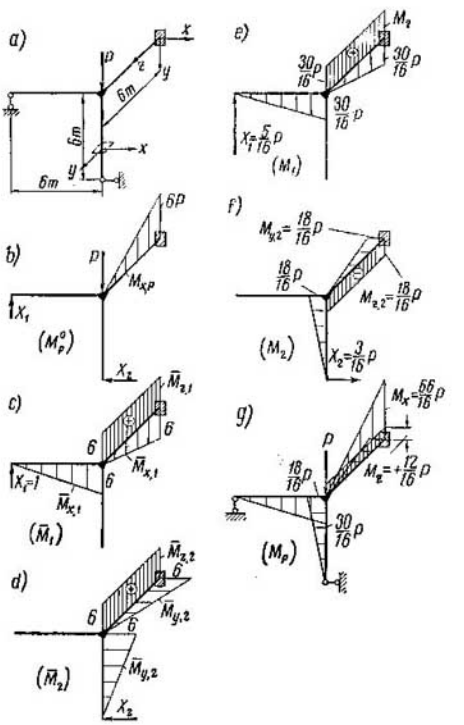
Las ecuaciones canónicas tienen la forma anterior:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kP} = 0 \tag{22.2}$$

El significado de los coeficientes y términos independientes es el mismo que en los sistemas planos y sus valores se determinan por (12.8):

$$\delta_{km} = \sum \int \overline{M}_{xk} \frac{\overline{M}_{xm}}{EJ_x} ds + \sum \int \overline{M}_{yk} \frac{\overline{M}_{ym}}{EJ_y} ds +$$
$$+ \sum \int \overline{M}_{zk} \frac{\overline{M}_{zm}}{GT} ds + \sum \int \mu_x \overline{Q}_{xk} \frac{\overline{Q}_{xm}}{GF} ds +$$
$$+ \sum \int \mu_y \overline{Q}_{yk} \frac{\overline{Q}_{ym}}{GF} ds + \sum \int \overline{N}_k \frac{\overline{N}_m}{EF} ds; \tag{22.3}$$

Fig. 468



$$\Delta_{kP}=\sum\int \bar{M}_{xk}\frac{M^0_{xP}}{EJ_x}ds+\sum\int \bar{M}_{yk}\frac{M^0_{yP}}{EJ_y}ds+$$
$$+\sum\int \bar{M}_{zk}\frac{M^0_{zP}}{GT}ds+\sum\int \mu_x\bar{Q}_{xk}\frac{Q^0_{xP}}{GF}ds+$$
$$+\sum\int \mu_y\bar{Q}_{yk}\frac{Q^0_{yP}}{GF}ds+\sum\int \bar{N}_k\frac{N^0_P}{EF}ds. \qquad (22.4)$$

Para las armaduras, respectivamente, son:

$$\delta_{km}=\sum \bar{N}_{ik}\frac{\bar{N}_{im}}{EF_i}l_i; \qquad (22.5)$$

$$\Delta_{kP}=\sum \bar{N}_{ik}\frac{N^0_{iP}}{EF_i}l_i. \qquad (22.6)$$

Cualquier fuerza sustituyente interna se determina por la expresión

$$S_P = \overline{S}_1 X_1 + \overline{S}_2 X_2 + \ldots + S_P^0. \qquad (22.7)$$

Los diagramas de las fuerzas internas pueden ser construidos por esta misma expresión.

Las verificaciones de los diagramas obtenidos por el cálculo son las mismas que en los sistemas planos.

Si el sistema es simétrico, entonces, su simetría deberá ser empleada en forma análoga a como fue indicado al examinar los sistemas planos.

En el cálculo de los sistemas espaciales, lo mismo que en el de los planos, corrientemente, a fin de simplificar el cálculo, se desprecia la influencia de las fuerzas internas N_z, Q_x y Q_y sobre los desplazamientos. Por eso, durante el cálculo de los sistemas espaciales, lo más frecuente es vernos obligados a construir los diagramas de M_x, M_z y M_y debidos a cada incógnita básica y a la carga, por los cuales se determinan los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas.

Ejemplo 67. Construir los diagramas de los momentos flectores en el pórtico de la fig. 468, *a*, si $\frac{EJ}{GT} = 1$ y $J_x = J_y = J$.

El sistema básico y el diagrama de carga se muestran en la fig. 468, *b*. Los diagramas unitarios, en la fig. 468, *b*, *c*. Los coeficientes y términos independientes los determinamos con la multiplicación de los diagramas:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_1) = \frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}6\frac{1}{EJ_x} + \frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}6\frac{1}{EJ_x} + \frac{6\cdot 6\cdot 6}{GT} = \frac{360}{EJ};$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2)\cdot(\overline{M}_2) = \frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}6\frac{1}{EJ_y} + \frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}6\frac{1}{EJ_y} + \frac{6\cdot 6\cdot 6}{GT} = \frac{360}{EJ};$$

$$\delta_{12} = (\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_2) = \frac{6\cdot 6\cdot 6}{GT} = \frac{216}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = (M_P^0)\cdot(\overline{M}_1) = -\frac{6\cdot 6P}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{EJ} = -\frac{72P}{EJ}.$$

Las ecuaciones canónicas son:

$$360X_1 + 216X_2 - 72P = 0;$$
$$216X_1 + 360X_2 + 0 = 0,$$

de donde $X_1 = \frac{5}{16}P$ y $X_2 = -\frac{3}{16}P$.

Los diagramas corregidos y definitivos se muestran en la fig. 468, *e*, *f*, *g*. Una de las verificaciones es:

$$(M_P)\cdot(\overline{M}_1) = \frac{30}{16}P\,\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{EJ} - \frac{66}{16}P\,\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{EJ} + \frac{12}{16}P\cdot 6\frac{6}{GT} = 0.$$

§ 224. CALCULO DE PORTICOS PLANOS BAJO CARGA ESPACIAL POR EL METODO DE FUERZAS. En el pórtico plano de la fig. 469, las incógnitas básicas X_1, X_2 y X_3, pertenecientes al plano del pórtico, originan desplazamientos sólo en este plano.

Por eso, todos los desplazamientos secundarios debidos a estas fuerzas X_1, X_2 y X_3, por la dirección de las incógnitas básicas restantes X_4, X_5 y X_6, como también, sus desplazamientos recíprocos, son iguales a cero.

Por consiguiente, las ecuaciones canónicas para tales sistemas, se separan en dos grupos independientes, independientemente de la

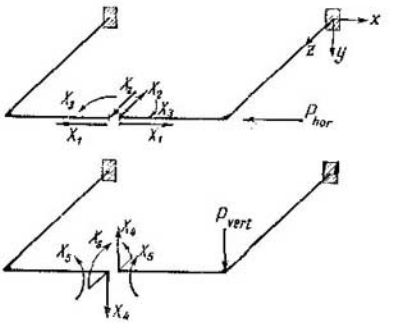


Fig. 469

carga. En uno entrarán sólo las incógnitas del tipo X_1, X_2 y X_3 y, en el otro, las del X_4 X_5 y X_6.

Si también dividimos la carga en perteneciente al plano del pórtico y perpendicular a él, entonces, la que está en el plano, origina sólo las incógnitas básicas distribuidas en el plano del pórtico (X_1, X_2 y X_3) y, la perpendicular al plano del pórtico, las X_4, X_5 y X_6.

Ejemplo 68. Construir los diagramas de los momentos flectores y torsores en el pórtico de la fig. 470, *a*, si las secciones de las barras son circulares, $\frac{E}{G} = 2{,}5$ y $\frac{T}{J} = 2$.

El sistema básico se muestra en la fig. 470, *b*. Por las condiciones de simetría tendremos sólo la incógnita X_1 (momento flector). Los diagramas debidos a $X_1 = 1$ se muestran en la fig. 470, *c* y, los de carga, en la 470, *d*. Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

El coeficiente δ_{11} y el término independiente Δ_{1P}, para $T = 2J$ serán

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1) \cdot (\overline{M}_1) = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{EJ} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{G2J} \right) 2 = \frac{13{,}5}{EJ},$$

$$\Delta_{1P} = (M_P^0) \cdot (\overline{M}_1) = -\left(\frac{3P}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{EJ} + \frac{3P}{2} \cdot 3 \frac{1}{G2J} \right) 2 = \frac{15{,}75P}{EJ}.$$

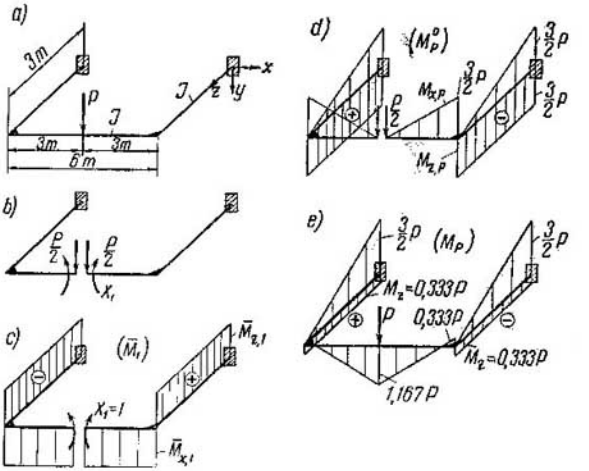
Por consiguiente:

$$13{,}5X_1 - 15{,}75P = 0, \text{ de donde } X_1 = 1{,}167P.$$

Los diagramas definitivos se muestran el la fig. 470, *e*.

Ejemplo 69. Construir los diagramas de los momentos flectores en las vigas cruzadas, sobre apoyos articulados, de las figs. 471.

Fig. 470



El esquema plano convencional se muestra en la fig. 471, *b* y, el sistema básico, en la fig. 471, *c*. Los diagramas unitarios y de carga están representados en la fig. 471, *d*. Las ecuaciones canónicas en la forma general, son

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0;$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0.$$

Los coeficientes y términos independientes son:

$$\delta_{11}(\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_1)=\left(\frac{1}{2}\,3\,\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\frac{2}{0{,}5EJ}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2EJ}=\frac{97}{9EJ};$$

$$\delta_{22}=(\overline{M}_2)\cdot(\overline{M}_2)=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)\frac{2}{0{,}5EJ}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2\,\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2EJ}=\frac{40}{9EJ};$$

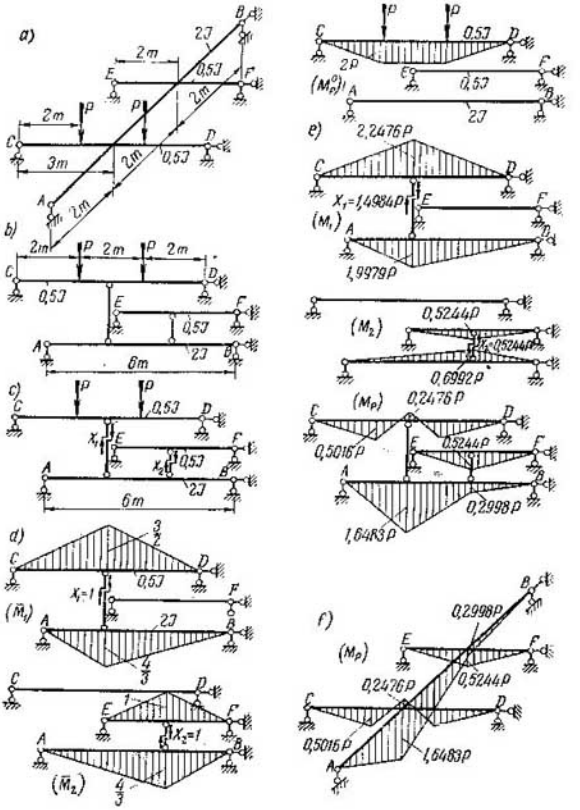
$$\delta_{12}=(\overline{M}_1)\cdot(\overline{M}_2)=\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\right]\frac{1}{2EJ}=\frac{42}{27EJ};$$

$$\Delta_{1P}=(M_P^0)\cdot(\overline{M}_1)=\left(-\frac{1}{2}\,2\cdot 2P\,\frac{2}{3}\,1-1\cdot 2P\,\frac{5}{2\cdot 2}\right)\frac{2}{0{,}5EJ}=-\frac{46P}{3EJ};$$

$$\Delta_{2P}=(M_P^0)\cdot(\overline{M}_2)=0.$$

Fig. 471



a)
b)
c)
d)
e)
f)
2m
3m
6m
2J
0,5J
P
X_1
X_2
$X_1=1$
$X_2=1$
$(\bar{M}_1)$
$(\bar{M}_2)$
(M_P^0)
(M_1)
(M_2)
(M_P)
2,2476P
$X_1=1,4984P$
1,9979P
0,5244P
$X_2=0,5244P$
0,6992P
0,2476P
0,5016P
0,2998P
1,6483P

Las ecuaciones canónicas, con coeficientes numéricos, son:

$$\frac{97}{9}X_1+\frac{42}{27}X_2-\frac{46}{3}P=0; \qquad \frac{42}{27}X_1+\frac{40}{9}X_2+0=0,$$

de donde obtenemos que: $X_1 = 1{,}4984\ P$ y $X_2 = -0{,}5244\ P$. El diagrama plano resultante de los momentos flectores, se muestra en la fig. 471, *e* y, el espacial, en la fig. 471, *f*.

Efectuamos la verificación del diagrama de (M_P) con la multiplicación por el diagrama unitario de $(\overline{M}_1)$:

$$(M_P)\cdot(\overline{M}_1)=\Big[-\frac{1}{2}\,2\cdot1\,\frac{2}{3}\,0{,}5016P+\frac{1}{2}\,1\cdot0{,}2476P\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\,1\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\,1\cdot0{,}5016P\cdot\left(\frac{2}{3}\,1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\Big]\frac{2}{0{,}5EJ}+$$

$$+\Big[\frac{1}{2}\,2\cdot1{,}6483P\,\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\,2\cdot1{,}6483P\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\,2\cdot0{,}2998P\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\,2\cdot0{,}2998P\,\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\Big]=$$

$$=-1{,}8476\,\frac{P}{EJ}+1{,}8481\,\frac{P}{EJ}\approx0.$$

§ 225. CALCULO DE PORTICOS ESPACIALES POR EL METODO DE DESPLAZAMIENTOS. Cada nudo de un pórtico espacial puede tener seis desplazamientos: tres ángulos de giro alrededor de los ejes de coordenadas y tres desplazamientos progresivos por la dirección de estos ejes. Igual que en los sistemas planos, para aquellas

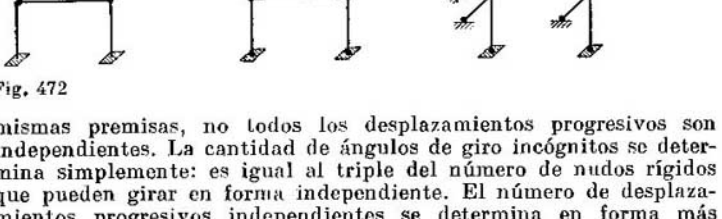
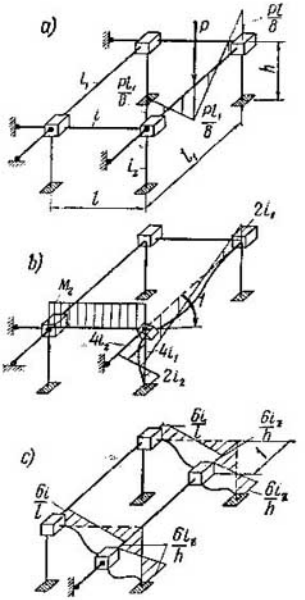


Fig. 472

mismas premisas, no todos los desplazamientos progresivos son independientes. La cantidad de ángulos de giro incógnitos se determina simplemente: es igual al triple del número de nudos rígidos que pueden girar en forma independiente. El número de desplazamientos progresivos independientes se determina en forma más complicada. Para esto hay que colocar rótulas en todos los nudos del pórtico (fig. 472, *a*), incluidos los de apoyo, e investigar la variabilidad de tal esquema articulado (fig. 472, *b*). La cantidad de desplazamientos independientes es igual al número de vínculos complementarios de fuerza que es necesario introducir en el esquema articulado, para que ésto sea invariante (fig. 472, *c*). Para el pórtico examinado, se debe introducir cuatro vínculos de fuerza.

El sistema básico se compone de la manera usual, sólo que, ahora, el vínculo de momento no será simple sino complejo, que impide simultáneamente el giro alrededor de tres ejes. Con otras palabras, él es capaz de crear reacciones de momento alrededor

Fig. 473



de tres ejes. En la fig. 473, *a*, se muestra el sistema básico del pórtico examinado, en el cual hay 12 ángulos de giro y cuatro desplazamientos progresivos.

En la fig. 473, *b*, *c*, se muestran algunos diagramas debidos a desplazamientos angulares y progresivos.

La particularidad de la construcción de los diagramas debidos al giro de los nudos es que todas las barras convergentes en un nudo se deforman. Si las barras son recíprocamente perpendiculares, entonces, durante el giro del nudo, unas de ellas trabajan a la flexión y otras a la torsión. Las barras que están en el plano de flexión trabajan a la flexión y, las perpendiculares a él, a la torsión. El momento de torsión que le corresponde a la unidad de giro del nudo es igual a:

$$M_z = \frac{GT}{l} = \frac{GT}{EJ}\, i. \tag{22.8}$$

Las ecuaciones canónicas tienen la forma usual:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \ldots + r_{kn}Z_n + R_{kP} = 0. \tag{22.9}$$

El significado de los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas es el anterior. Sus magnitudes pueden ser determinadas por los mismos procedimientos que fueron expuestos al examinar los sistemas planos. El método estático de su determinación es particularmente cómodo.

El diagrama total se construye por la expresión

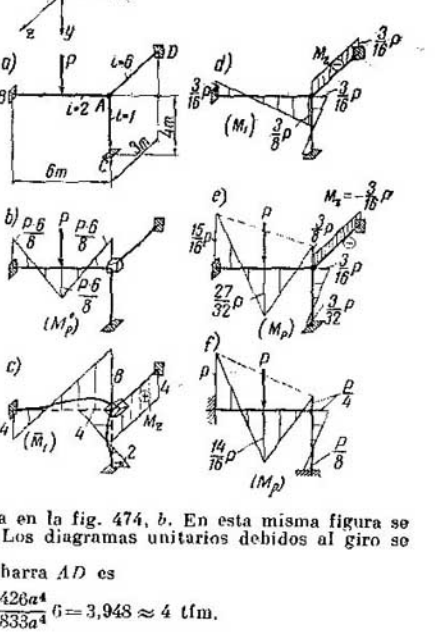
$$(M_P) = (\overline{M}_1)\, Z_1 + (\overline{M}_2)\, Z_2 + \ldots + (M_P^0). \tag{22.10}$$

La simetría se emplea de la misma manera que en los sistemas planos.

Ejemplo 70. Construir, por el método de desplazamientos, los diagramas de momentos para el pórtico representado en la fig. 474, si las secciones de las barras son cuadradas, $E/G = 2.6$, $T = 0{,}1426a^4$ y $J = \frac{a^4}{12} = 0{,}0833\ a^4$.

Hablando en general, el pórtico tiene tres ángulos de giro incógnitos, pero, para la carga dada, sólo una incógnita básica, el ángulo de giro alrededor del

Fig. 474



eje z. El sistema básico se muestra en la fig. 474, *b*. En esta misma figura se representa el diagrama de carga. Los diagramas unitarios debidos al giro se muestran en la fig. 474, *c*.

El momento de torsión en la barra AD es

$$M_z = \frac{1}{2{,}6} \cdot \frac{0{,}1426a^4}{0{,}0833a^4} 6 = 3{,}948 \approx 4 \text{ tfm}.$$

Del recorte del nudo hallamos que

$$r_{11} = 8 + 4 + 4 = 16 \text{ tfm}, \quad R_{1P} = \frac{3}{4} P.$$

Numéricamente, la ecuación canónica es

$$16Z_1 + \frac{3}{4} P = 0,$$

de donde $Z_1 = -\frac{3}{64} P$.

En la fig. 474, *d*, *e*, se muestran los diagramas corregido y total. Para que sirva de comparación, en la fig. 474, *f*, se muestra el diagrama de momentos flectores en un pórtico plano.

CAPITULO XXIII * CALCULO DE SISTEMAS PLANOS POR EL ESTADO DEFORMADO

§ 226. PARTICULARIDADES DEL CALCULO POR EL ESTADO DEFORMADO. Como fue aclarado arriba (véase el § 1), el cálculo de estructuras efectuado, corrientemente, con la determinación de las fuerzas externas por el esquema del sistema en estado indeformado, o sea, sin tener en cuenta la variación del esquema después de la deformación del sistema, es un cálculo aproximado.

Uno más preciso es el cálculo de estructuras por el estado deformado, llamado, convencionalmente, *«cálculo de deformación»*.

En este cálculo, las fuerzas internas se determinan por el esquema de la estructura en estado deformado que, a su vez, depende de ellas.

Por eso, **en primer lugar**, en un sentido riguroso, casi todos los sistemas se hacen hiperestáticos y, **en segundo**, que es lo más importante, al considerar el estado deformado de la estructura, la dependencia lineal entre las fuerzas y los desplazamientos ya no se cumple, el principio de independencia de acción de las fuerzas ya no es aplicable, con todas las complicaciones que para el cálculo se deriban de ello. En este caso, la alinealidad engendrada entre las fuerzas y los desplazamientos, convencionalmente, puede ser llamada «alinealidad geométrca», a diferencia de la «alinealidad física», producida por la ausencia en el material de proporcionalidad directa entre las deformaciones relativas y las tensiones.

Es particularmente importante comprender que, aunque el cálculo corriente de los sistemas hiperestáticos por el esquema de estado indeformado de la estructura está basado, precisamente, en los estudios del estado deformado del sistema, en éste, durante el cálculo de los desplazamientos, las fuerzas internas se determinaron por el esquema del sistema indeformado, y no es, precisamente, sobre tal consideración del estado deformado de lo que se habla en este capítulo.

En el cálculo corriente no se toma en cuenta la influencia de las fuerzas longitudinales en la aparición de los momentos flectores complementarios en el estado deformado, los cuales, para determinadas condiciones, pueden jugar un papel importante. Así, por ejemplo, es bien conocido que, en el caso de flexión axi-transversal de las vigas, los momentos flectores debidos a las fuerzas longitudinales en el estado deformado, son tales, que no siempre se los puede despreciar.

Los resultados del cálculo corriente, basado en la determinación de las fuerzas internas por el estado indeformado, no satisfacen en un sentido riguroso a las ecuaciones de equilibrio de las partes seccionadas del sistema en el estado deformado.

El grado de certeza del cálculo corriente depende de las propiedades del sistema y de en cuanto el estado de la estructura está lejos

de ser el crítico, en el cual, con un pequeño aumento de las cargas, ocurre un rápido incremento de los desplazamientos. Esta incrementación tiene lugar, ante todo, por la influencia de las fuerzas longitudinales sobre los momentos flectores en el estado deformado del sistema. Frecuentemente, el cálculo corriente da un grado de precisión satisfactorio, de ahí que el cálculo por el estado indeformado esté bastante extendido. ¡Frecuentemente, pero no siempre! Es necesario saber esto y recordarlo.

La última observación es muy esencial para los arcos y puentes colgantes (particularmenre para los que reciben presión horizontal) y, en primer lugar, para los arcos en pendiente suave. Ella se refiere, aún en mayor grado, a los cálculos de estructuras por el primer

Fig. 475

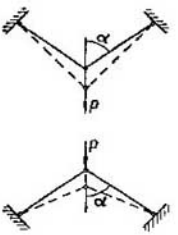
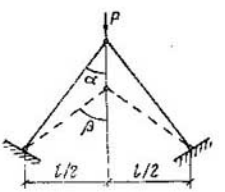


Fig. 476



estado límite, en el cual, la influencia que las fuerzas longitudinales tienen sobre la aparición de los momentos flectores complementarios, es significativamente mayor que ante el cálculo de estructuras en estado elástico.

El cálcudo de estructuras por el esquema de sistemas en estado indeformado puede producir error en uno y otro sentido. Esto se ve, por ejemplo, al examinar el sistema representado en la fig. 475. En el primer caso, durante la tracción de las barras tiene lugar una disminución del ángulo α, lo cual lleva a una disminución de los esfuerzos N en las barras. En el segundo caso, durante la compresión de las barras, el ángulo α se incrementa y los esfuerzos en las barras aumentan.

El cálculo de arcos por el esquema de estado indeformado sobre todo de arcos en pendiente suave, también dan un valor disminuido de las fuerzas internas, y en mayor grado esto se refiere a los arcos biarticulados que a los arcos sin articulaciones.

En adelante, examinaremos el cálculo por el estado deformado, sólo en la fase elástica.

§ 227. CALCULO EXACTO POR EL ESTADO DEFORMADO. El cálculo de estructuras por el estado deformado, lo examinaremos en el ejemplo de algunos sistemas simples.

Examinemos, al principio, el sistema representado en la fig. 476, donde con líneas punteadas se representa el estado deformado.

La fuerza longitudinal en las barras es

$$N = P : 2\cos\beta. \tag{23.1}$$

El acortamiento físico absoluto de las barras, por la ley de Hooke, es

$$\Delta s = \frac{P}{2\cos\beta} \cdot \frac{l}{2\operatorname{sen}\alpha\, EJ}.$$

El acortamiento geométrico absoluto de las barras como diferencia de las longitudes, es:

$$\Delta s = \frac{l}{2\operatorname{sen}\alpha} - \frac{l}{2\operatorname{sen}\beta}.$$

Igualando las ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{Pl}{4EF\cos\alpha\cos\beta} = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\right).$$

De donde tendremos que $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha : \left(1 - \frac{P}{2EF\cos\beta}\right)$. (23.2)

La resolución de la ecuación es cómodo efectuarla por el procedimiento de aproximaciones sucesivas, suponiendo, al principio, en

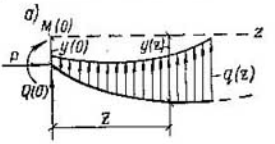
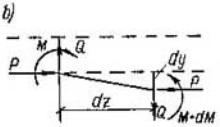


Fig. 477

el segundo miembro, que $\beta_1 = \alpha$, luego que $\beta_2 = \beta_1$, etc. La fuerza longitudinal en la barra se determina por el valor hallado del ángulo β (por 23.1).



Ahora, examinemos la flexión axitransversal de las vigas y compongamos la ecuación general de la línea elástica (fig. 477), indispensable para los cálculos ulteriores.

La expresión del momento flector en la primera parte, es

$$M(z) = M(0) + Q(0)\,z + q(0)\frac{z^2}{2!} + q'(0)\frac{z^3}{3!} + \frac{q''(0)\,z^4}{4!} + \\ + \ldots + P[y - y(0)] = M^{\text{vig}} + P[y - y(0)], \tag{23.3}$$

donde M^{vig} es el momento flector debido sólo a las cargas transversales.

La ecuación diferencial de la línea elástica es

$$y'' = -\frac{M(z)}{EJ} = -\frac{M^{\text{vig}} + P[y - y(0)]}{EJ}$$

o bien

$$x'' + \alpha^2 y = -\frac{M^{\text{vig}} + Py(0)}{EJ}, \tag{23.4}$$

donde $\alpha^2 = P : EJ$.

La ecuación general de la línea elástica en el primer sector para el caso de flexión longitudinal-transversal de las vigas, se obtiene efectuando la integración de esta ecuación y expresando las constantes arbitrarias por medio de los parámetros iniciales:

$$y_1(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha z - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1-\cos\alpha z) - \\ - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}\cdot(\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z) - \frac{q(0)}{\alpha^4 EJ}\left(\frac{\alpha^2 z^2}{2!} + \right. \\ \left. + \cos\alpha z - 1\right) - \frac{q'(0)}{\alpha^5 EJ}\cdot\left(\frac{\alpha^3 z^3}{3!} + \operatorname{sen}\alpha z - \alpha z\right) - \\ - \frac{q''(0)}{\alpha^6 EJ}\left(\frac{\alpha^4 z^4}{4!} - \frac{\alpha^2 z^2}{2!} + 1 - \cos\alpha z\right) - \ldots - \ldots \qquad (23.5)$$

Diferenciando, sucesivamente, tendremos:

$$y_1'(z) = y'(0)\cos\alpha z - \frac{M(0)}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\alpha z - \\ - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}(1-\cos\alpha z) - \frac{q(0)}{\alpha^3 EJ}(\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z) - \\ - \frac{q'(0)}{\alpha^4 EJ}\left(\frac{\alpha^2 z^2}{2!} + \cos\alpha z - 1\right) - \\ - \frac{q''(0)}{\alpha^5 EJ}\left(\frac{\alpha^3 z^3}{3!} - \alpha z + \operatorname{sen}\alpha z\right); \qquad (23.6)$$

$$M_1(z) = -EJy_1''(z) = \alpha EJ y'(0)\operatorname{sen}\alpha z + M(0)\cos\alpha z + \\ + \frac{Q(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha z + \frac{q(0)}{\alpha^2}(1-\cos\alpha z) + \\ + \frac{q'(0)}{\alpha^3}(\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z) + \frac{q''(0)}{\alpha^4}\left(\frac{\alpha^2 z^2}{2!} + \right. \\ \left. + \cos\alpha z - 1\right) + \ldots + \ldots \qquad (23.7)$$

Para mayor comodidad, vamos a calcular la fuerza transversal por el estado indeformado de la viga (fig. 477, *b*):

$$Q_1(z) = M_1'(z) - Py'(z) = Q(0) + q(0)\,z + q'(0)\frac{z^2}{2!} + \\ + q''(0)\frac{z^3}{3!} + \ldots + \ldots \qquad (23.8)$$

En vigor de la linealidad de la ecuación diferencial (23.4), ante la fuerza longitudinal constante P, el principio de independencia de acción de las fuerzas, respecto a las cargas transversales, es válido.

Por este principio, las ecuaciones $y(z)$, $y'(z)$, $M(z)$ y $Q(z)$ en las partes siguientes, pueden ser escritas agregando a las expresiones (23.5) — (23.8) términos complementarios.

Si las discontinuidades en las magnitudes $y(z)$, $y'(z)$, $M(z)$ y $Q(z)$ tienen lugar para la coordenada $z = a_i$, entonces, los términos adicionales en la forma general, serán respectivamente:

para la ecuación (23.5)

$$\Delta y(z) = \Delta y(a_i) + \frac{\Delta y'(a_i)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha(z-a_i) - \frac{\Delta M(a_i)}{\alpha^2 EJ}[1-\cos\alpha(z-a_i)] -$$
$$- \frac{\Delta Q(a_i)}{\alpha^3 EJ}[\alpha(z-\alpha_i) - \operatorname{sen}\alpha(z-a_i)] -$$
$$- \frac{\Delta q(a_i)}{\alpha^4 EJ}\left[\frac{\alpha^2(z-a_i)^2}{2!} + \cos\alpha(z-a_i) - 1\right] -$$
$$- \frac{\Delta q'(a_i)}{\alpha^5 EJ}\left[\frac{\alpha^3(z-\alpha_i)^3}{3!} + \operatorname{sen}\alpha(z-a_i) - \alpha(z-a_i)\right] -$$
$$- \frac{\Delta q''(\alpha_i)}{\alpha^6 EJ}\left[\frac{\alpha^4(z-a_i)^4}{4!} - \frac{\alpha^2(z-a_i)^2}{2!} + \right.$$
$$\left. + 1 - \cos\alpha(z-a_i)\right] - \ldots - ; \qquad (23.9)$$

para la ecuación (23.6)

$$\Delta y'(z) = \Delta y'(a_i)\cos\alpha(z-a_i) - \frac{\Delta M(a_i)}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\alpha(z-a_i) -$$
$$- \frac{\Delta Q(a_i)}{\alpha^2 EJ}[1-\cos\alpha(z-\alpha_i)] -$$
$$- \frac{\Delta q(a_i)}{\alpha^3 EJ}[\alpha(z-a_i) - \operatorname{sen}\alpha(z-a_i)] -$$
$$- \frac{\Delta q'(a_i)}{\alpha^4 EJ}\left[\frac{\alpha^2(z-\alpha_i)^2}{2!} + \cos\alpha(z-a_i) - 1\right] -$$
$$- \frac{\Delta q''(a_i)}{\alpha^5 EJ}\left[\frac{\alpha^3(z-a_i)^3}{3!} + \alpha(z-a_i) - \operatorname{sen}\alpha(z-a_i)\right] - \ldots - \ldots ; \qquad (23.10)$$

para la ecuación (23.7)

$$\Delta M(z) = \alpha EJ\Delta y'(a_i)\operatorname{sen}\alpha(z-a_i) +$$
$$+ \Delta M(a_i)\cos\alpha(z-a_i) + \frac{\Delta Q(a_i)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha(z-a_i) +$$
$$+ \frac{\Delta q(a_i)}{\alpha^2}[1-\cos\alpha(z-a_i)] +$$
$$+ \frac{\Delta q'(a_i)}{\alpha^3}[\alpha(z-a_i) - \operatorname{sen}\alpha(z-a_i)] +$$
$$+ \frac{\Delta q''(a_i)}{\alpha^4}\left[\frac{\alpha^2(z-a_i)^2}{2} + \cos\alpha(z-a_i) - 1\right] + \ldots ; \qquad (23.11)$$

para la ecuación (23.8)

$$\Delta Q(z) = \Delta Q(a_i) + \Delta q'(a_i)(z-a_i) + \frac{\Delta q'(a_i)(z-a_i)^2}{2!} +$$
$$+ \frac{\Delta q''(a_i)(z-a_i)^3}{3!} + \ldots \qquad (23.12)$$

La aplicación de las ecuaciones obtenidas se examina más adelante.

Los casos examinados en los que se emplea el cálculo preciso por el estado deformado, si bien, dan cierta idea sobre el principio de su esencia, no revelan todas las complicaciones que aparecen en la mayoría de los casos. La cuestión consiste en que, en los casos examinados, las fuerzas internas del estado deformado se expresaban fácilmente por medio de las fuerzas externas, teniéndolo en cuenta.

De manera completamente distinta ocurre en los otros casos, cuando la dependencia recíproca entre las fuerzas internas y el estado deformado se revela en forma complicada. Tal caso tendremos, por ejemplo, durante el cálculo de arcos y pórticos.

Por eso, un cálculo más preciso por el estado deformado, como norma, es complicado. Dado que los resultados del cálculo por el estado deformado dependen de los desplazamientos del sistema, es decir, de su rigidez, entonces, cuanto más rígido sea el sistema tanto más exacto será el cálculo corriente.

Se pueden lograr algunas simplificaciones del cálculo por el estado deformado, si empleamos el método de aproximaciones sucesivas (véase más adelante), pero, de todos modos, sigue siendo complicado.

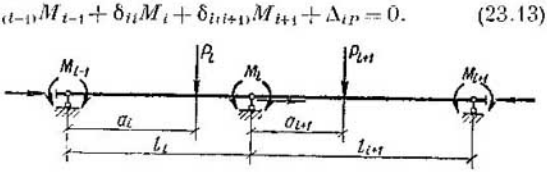
§ 228. CALCULO DE VIGAS CONTINUAS. Examinemos el cálculo de las vigas continuas con una variación escalonada de la sección en los apoyos con diferentes fuerzas, pero constantes dentro de los límites de cada tramo, por dos métodos.

1. CÁLCULO POR EL MÉTODO DE FUERZAS

El sistema básico está representado en la fig. 478. La ecuación de tres momentos es

$$\delta_{i(i-1)}M_{i-1}+\delta_{ii}M_i+\delta_{i(i+1)}M_{i+1}+\Delta_{iP}=0. \qquad (23.13)$$

Fig. 478



Los efectos de los momentos de apoyo sobre el elemento del sistema básico (una viga sobre dos apoyos), examinados por las expresiones (23.5) — (23.8), se dan en la tabla 19.

De acuerdo a esta tabla, obtenemos que:

$$\delta_{i(i-1)}=\frac{l_i}{6EJ_i}f_2^*(\lambda_i); \qquad (23.14)$$

$$\delta_{ii}=\frac{l_i}{3EJ_i}f_1^*(\lambda_i)+\frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}f_1^*(\lambda_{i+1}); \qquad (23.15)$$

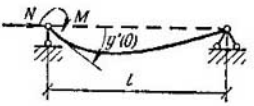
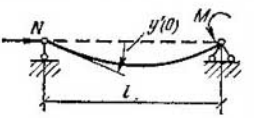
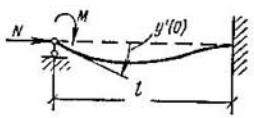
$$\delta_{i(i+1)}=\frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}f_2^*(\lambda_{i+1}). \qquad (23.16)$$

Ahora, la ecuación de tres momentos será:

$$l_i \frac{J_0}{J_i} f_2^*(\lambda_i) M_{i-1} + 2\left[l_i \frac{J_0}{J_i} f_1^*(\lambda_i) + l_{i+1} \frac{J_0}{J_{i+1}} f_1^*(\lambda_{i+1})\right] M_i + \\ + \frac{l_{i+1} J_0}{J_{i+1}} f_2^*(\lambda_{i+1}) M_{i+1} + 6EJ_0 \Delta_{jP} = 0, \qquad (23.17)$$

donde J_0 es el momento de inercia tomado como básico.

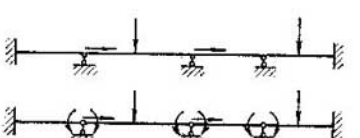
Tabla 19

Esquema de carga de la viga	$y'(0)$	$f^*(\lambda)$
	$\frac{Ml}{3EJ} f_1^*(\lambda)$	$f_1^*(\lambda) = \frac{3}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda}\right)$
	$\frac{Ml}{6EJ} f_2^*(\lambda)$	$f_2^*(\gamma) = \frac{6}{\lambda}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)$
	$\frac{Ml}{4EJ} f_3^*(\lambda)$	$f_3^*(\lambda) = \frac{8\operatorname{tg}\lambda}{\lambda} \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)}{\operatorname{tg}\lambda - \lambda}$
$\lambda = \alpha l;\ \alpha^2 = N/EI$		

Observación. $f_1^*(0) = f_2^*(0) = f_3^*(0) = 1$.

Si la viga continua tiene uno o ambos extremos empotrados (fig. 479, *a*), entonces, para simplificar el cálculo, es cómodo tomar

Fig. 479



en calidad de sistema básico el sistema hiperestetico (fig. 479, *b*).

Esto exige un estudio previo de la viga (fig. 480), por el cual, tendremos que

$$y'(0) = \frac{Ml}{4EJ} f_3^*(\lambda), \qquad (23.18)$$

$$f_3^*(\lambda) = \frac{4(2-2\cos\lambda-\lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda)}{\lambda(\mathrm{sen}\,\lambda-\lambda\cos\lambda)} = \frac{[8\,\mathrm{tg}\,\lambda\left(\mathrm{tg}\,\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda(\mathrm{tg}\,\lambda-\lambda)}. \quad (23.19)$$

De haber empotramiento izquierdo (fig. 481),

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{4EJ_1} f_3^*(\lambda_1) + \frac{l_2}{3EJ_2} f_1^*(\lambda_2).$$

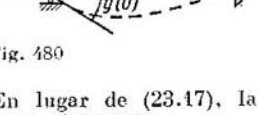


Fig. 480

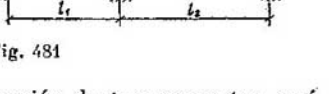


Fig. 481

En lugar de (23.17), la primera ecuación de tres momentos, será respectivamente

$$\left[\frac{6}{4} l_1 \frac{J_0}{J_1} f_3^*(\lambda_1) + 2l_2 \frac{J_0}{J_2} f_1^*(\lambda_2)\right] M_1 +$$
$$+ l_2 \frac{J_0}{J_2} f_2^*(\lambda_2) M_2 + 6EJ_0\Delta_{1P} = 0. \quad (23.20)$$

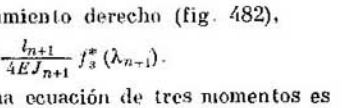


Fig. 482

Análogamente, de haber empotramiento derecho (fig. 482),

$$\delta_{nn} = \frac{l_n}{3EJ_n} f_1^*(\lambda_n) + \frac{l_{n+1}}{4EJ_{n+1}} f_3^*(\lambda_{n+1}).$$

A diferencia de (23.17), la última ecuación de tres momentos es

$$l_n \frac{J_0}{J_n} f_2^*(\lambda_n) M_{n-1} +$$
$$+ \left[2l_n \frac{J_0}{J_n} f_2^*(\lambda_n) + \frac{6l_{n+1}J_0}{4J_{n+1}} f_3^*(\lambda_{n+1})\right] M_n + 6EJ_0\Delta_{nP} = 0. \quad (23.21)$$

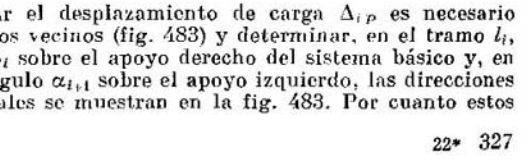


Fig. 483

Para determinar el desplazamiento de carga Δ_{iP} es necesario examinar dos tramos vecinos (fig. 483) y determinar, en el tramo l_i, el ángulo de giro β_i sobre el apoyo derecho del sistema básico y, en el tramo l_{i+1}, el ángulo α_{i+1} sobre el apoyo izquierdo, las direcciones positivas de los cuales se muestran en la fig. 483. Por cuanto estos

ángulos pueden determinarse por las ecuaciones del método de los parámetros iniciales (23.5) — (23.12), en las cuales, obligadamente, en calidad de incógnita, se incluirá el parámetro inicial $y'(0)$, entonces, en este caso, se puede recomendar girar el tramo l_i, como se muestra en la fig. 484.

Examinemos dos casos particulares de carga de vigas de un sistema básico.

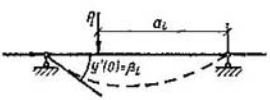


Fig. 484

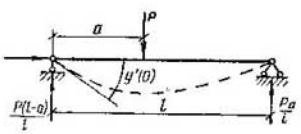


Fig. 485

1. Viga con fuerza concentrada (fig. 485). Por las expresiones (23.5) — (23.8) y (23.9) — (23.12)

$$y(z) = \frac{y'(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha z - \frac{P(l-a)}{l\alpha^3 EJ}(\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z)\Big|_0^a + \\ + \frac{P}{\alpha^3 EJ}[\alpha(z-a) - \operatorname{sen}\alpha(z-a)]\Big|_a^l. \qquad (23.22)$$

La condición límite sobre el extremo derecho, para $z = l$, es

$$y(l) = \frac{y'(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha l - \frac{P(l-a)}{l\alpha^3 EJ}(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l) + \\ + \frac{P}{\alpha^3 EJ}[\alpha(l-a) - \operatorname{sen}\alpha(l-a)] = 0.$$

De aquí obtenemos que

$$y'(0) = \frac{Pl^2}{\lambda^2 EJ}\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha(l-a)}{\operatorname{sen}\lambda} - \frac{l-a}{l}\right], \qquad (23.23)$$

donde $\lambda = \alpha l = l\sqrt{\frac{N}{EJ}}$.

Con la sustitución de $(l-a)$ por a en (23.23) y el cambio de signo, obtenemos que

$$y'(l) = -\frac{Pl^2}{\lambda^2 EJ}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha a}{\operatorname{sen}\lambda} - \frac{a}{l}\right). \qquad (23.24)$$

La ecuación de la línea elástica (23.22) es

$$y(z) = \frac{Pl^3}{\lambda^3 EJ}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha(l-a)}{\operatorname{sen}\lambda}\operatorname{sen}\alpha z - \frac{P(l-a)}{l\lambda^2 EJ}l^2 z\Big|_0^a + \\ + \frac{Pl^3}{\lambda^3 EJ}[\alpha(z-a) - \operatorname{sen}\alpha(z-a)]\Big|_a^l. \qquad (23.25)$$

Si la fuerza P está aplicada en el centro del tramo, entonces,

$$y'(0) = -y'(l) = \frac{Pl^2}{\lambda^2 EJ}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{sen}\lambda} - \frac{1}{2}\right). \qquad (23.26)$$

La ecuación de la línea elástica en la primera sección, por (23.25), para $0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}$, será

$$y(z) = \frac{Pl^3}{\lambda^3 EJ} \cdot \frac{1}{2\cos\frac{\lambda}{2}} \cdot \operatorname{sen}\alpha z - \frac{Pl^2}{2\lambda^2 EJ} z. \qquad (23.27)$$

La ecuación de los momentos flectores en la primera sección, por (23.7), será

$$M(z) = \frac{Pl}{2\lambda} \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha z}{\cos\frac{\lambda}{2}}. \qquad (23.28)$$

La flexión y el momento de flexión bajo la carga serán, respectivamente:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{2\lambda^3 EJ}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right); \qquad (23.29)$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} : \frac{\lambda}{2}\right). \qquad (23.30)$$

2. Viga con carga uniforme por todo el tramo (fig. 486).

$$y(z) = \frac{y'(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha z - \frac{ql}{2\alpha^3 EJ}(\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z) + \frac{q}{\alpha^4 EJ}\left(\frac{\alpha^2 z^2}{2} + \cos\alpha z - 1\right). \qquad (23.31)$$

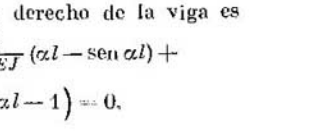


Fig. 486

La condición límite sobre el extremo derecho de la viga es

$$y(l) = \frac{y'(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha l - \frac{ql}{2\alpha^3 EJ}(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l) + \frac{q}{\alpha^4 EJ}\left(\frac{\alpha^2 l^2}{2} + \cos\alpha l - 1\right) = 0,$$

de donde

$$y'(0) = \frac{ql^3}{EJ} \cdot \frac{1}{\lambda^3}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right). \qquad (23.32)$$

La ecuación de la línea elástica, por (23.31), es

$$y(z) = \frac{ql^4}{EJ\lambda^4}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}\alpha z + \cos\alpha z - 1\right) - \frac{qz(l-z)}{2\alpha^2 EJ}. \qquad (23.33)$$

La flecha en el punto medio del tramo es

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{\lambda^4 EJ}\left(\frac{1}{\cos\frac{\lambda}{2}} - 1 - \frac{\lambda^2}{8}\right). \qquad (23.34)$$

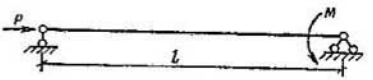
Los momentos flectores, por (23.7), son

$$M(z) = \alpha EJ\,\frac{ql^3}{EJ}\cdot\frac{1}{\lambda^3}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha z + \\ + \frac{ql}{2\alpha}\operatorname{sen}\alpha z - \frac{q}{\alpha^2}(1 - \cos\alpha z).$$

Después de las simplificaciones

$$M(z) = \frac{ql^2}{\lambda^2}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}\alpha z - 1 + \cos\alpha z\right). \qquad (23.35)$$

Fig. 487



El momento flector en el punto medio del tramo es

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{gl^2}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\lambda}{2}} - 1\right). \qquad (23.36)$$

3. Viga con momento en el extremo derecho (fig. 487). Los momentos flectores son

$$M(z) = M\,\operatorname{sen}\left(\lambda\,\frac{z}{l}\right) : \operatorname{sen}\lambda. \qquad (23.37)$$

Por esta ecuación fue compuesta, con algunos valores de λ, la tabla 20 de los momentos flectores $\overline{M}(z)$ debidos al momento de apoyo $M = 1$. Señalamos que, para $\lambda = \pi$ y $N = N_e$, todas las expresiones son iguales al infinito.

Tabla 20

$$\lambda = \alpha l; \qquad \alpha^2 = N : EJ$$

λ	$\operatorname{sen}\left(\lambda\,\frac{z}{l}\right) : \operatorname{sen}\lambda$				
	$z=0$	$z=\frac{l}{4}$	$z=\frac{l}{2}$	$z=\frac{3}{4}\,l$	$z=l$
0	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0,50	0	0,26004	0,51603	0,76397	1,00
1,00	0	0,29401	0,50975	0,81006	1,00
1,50	0	0,36719	0,68336	0,90454	1,00
2,00	0	0,52725	0,92540	1,09699	1,00
2,50	0	0,97766	1,58568	1,59422	1,00
3,00	0	4,83022	7,06838	5,51353	1,00

Fig. 488

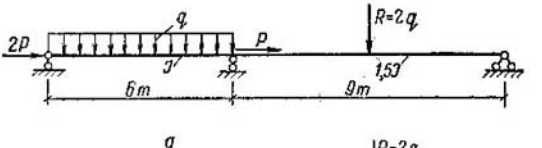


Fig. 489

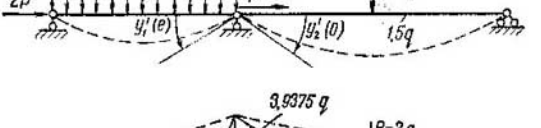


Fig. 490

Ejemplo 71. Construir los diagramas de los momentos flectores y el gráfico de variación del momento de apoyo en la viga continua de la fig. 488, para ciertos valores de $\lambda_1 = \alpha_1 l_1$.

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2P}{EJ}}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{3P}{1{,}5EJ}} = \alpha_1;$$

$$\lambda_1 = \alpha_1 6; \quad \lambda_2 = \alpha_1 9 = 1{,}5\lambda_1.$$

Para nuestro caso, la ecuación de los tres momentos, por (23.17), es

$$2\left[\frac{l_1 J_0}{J_1} f_1^*(\lambda_1) + \frac{l_2 J_0}{J_2} f_1^*(\lambda_2)\right] M_1 + 6EJ_0 \Delta_{1P} = 0. \qquad (a)$$

de donde

$$M_1 = -\frac{3E\Delta_{1P}}{\frac{l_1}{J_1} f_1^*(\lambda_1) + \frac{l_2}{J_2} f_1^*(\lambda_2)}. \qquad (b)$$

Para la determinación de Δ_{1P} examinemos el sistema básico bajo la carga dada (fig. 489).

Por las fórmulas (23.26) y (23.32) obtenemos que

$$\Delta_{1P} = \frac{q l_1^3}{EJ_1} \cdot \frac{1}{\lambda_1^3}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}\right) + \frac{R l_2^3}{\lambda_2^3 EJ_2}\left(\frac{1}{2\cos\frac{\lambda_2}{2}} - \frac{1}{2}\right). \qquad (c)$$

Colocando (c) en (b), tendremos que

$$M_1 = -\left[\frac{108q}{\lambda_1^3}\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}\right) + \frac{24q}{\lambda_1^2}\left(\frac{1}{2\cos 0{,}75\lambda_1} - \frac{1}{2}\right)\right] : \left[f_1^*(\lambda_1) + f_1^*(\lambda_2)\right]. \qquad (d)$$

Construimos el diagrama de los momentos flectores para varios valores de λ_1:

1) $\lambda_1 = 0$. En este caso, la expresión (d) da una indeterminación, con el desarrollo de la cual, tendremos que $M = -3{,}9375q$, lo que corresponde a una viga continua sin cargas longitudinales (fig. 490);

2) $\lambda_1 = 1{,}00$ y $\lambda_2 = 1{,}50$. Por la fórmula (d) obtenemos que

$$M_1 = -\left[\frac{108q}{1^3}(\operatorname{tg} 0{,}5 - 0{,}5) + \frac{24q}{1^2}\left(\frac{1}{2\cos 0{,}75} - \frac{1}{2}\right)\right] :$$

$$: (1{,}0737 + 1{,}1915) = -4{,}1501q.$$

El diagrama de momentos debido al momento de apoyo unitario, construido por la tabla 20, se expone en la fig. 491, *a* y, el debido al momento completo $M_1 = -4{,}15010q$, en la fig. 491, *b*.

La ecuación de los momentos flectores en el primer tramo del sistema básico, debidos a la carga uniforme, la escribimos por (23.35)

$$M(z) = q \cdot 6^2 (\operatorname{tg} 0{,}5 \operatorname{sen} \alpha z - 1 + \cos \alpha z).$$

El diagrama de la fig. 492, *a*, se construyó por esta ecuación.

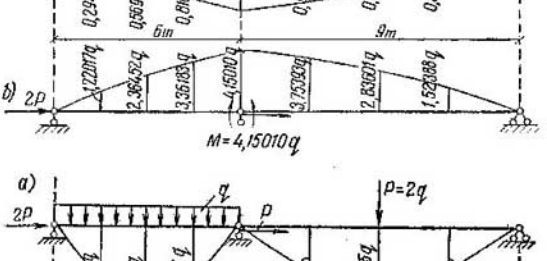


Fig. 491

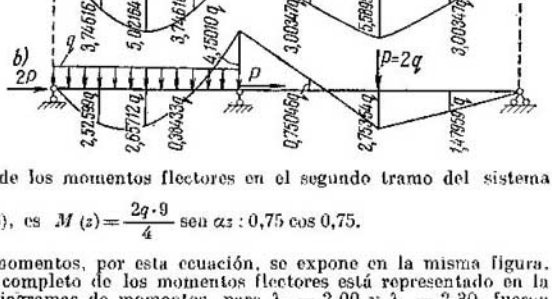


Fig. 492

La ecuación de los momentos flectores en el segundo tramo del sistema básico, por (23.28), es $M(z) = \dfrac{2q \cdot 9}{4} \operatorname{sen} \alpha z : 0{,}75 \cos 0{,}75$.

El diagrama de momentos, por esta ecuación, se expone en la misma figura.

El diagrama completo de los momentos flectores está representado en la fig. 492, *b*. Los diagramas de momentos, para $\lambda_1 = 2{,}00$ y $\lambda_1 = 2{,}30$, fueron construidos análogamente. Para $\lambda_1 = 2{,}355$, $f_1^*(2{,}355) + f_1^*(3{,}5325) = 0^*$ y $M = \infty$. Esto significa que, para $\lambda_1 = 2{,}355$, las fuerzas longitudinales son iguales a las críticas. La gráfica de dependencia de M_1 en función de λ_1 se da en la fig. 493.

---

* Los valores numéricos de la función $f_1^*(\lambda) - f_2^*(\lambda)$ y, también, los de las funciones $\mu_1^*(\lambda)$, $-\mu_2^*(\lambda)$ (véase la pág. 333—334), pero, para otras designaciones, están contenidos en el trabajo [6].

2. CÁLCULO POR EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS

El sistema básico es el común (fig. 494). La ecuación canónica de los tres ángulos de giro será

$$r_{i(i-1)}Z_{i-1} + r_{ii}Z_i + r_{i(i+1)}Z_{i+1} + R_{ip} = 0. \qquad (23.38)$$

Los datos sobre las reacciones unitarias r_{hm} están contenidos en la tabla 21.

Fig. 493

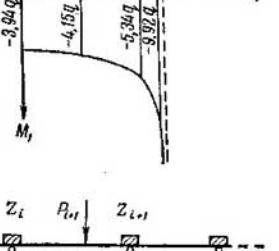
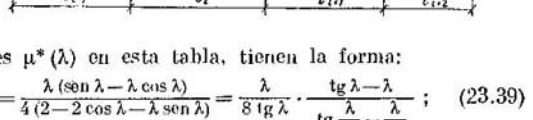


Fig. 494



Las funciones $\mu^*(\lambda)$ en esta tabla, tienen la forma:

$$\mu_1^*(\lambda) = \frac{\lambda(\operatorname{sen}\lambda - \lambda\cos\lambda)}{4(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)} = \frac{\lambda}{8\operatorname{tg}\lambda}\cdot\frac{\operatorname{tg}\lambda-\lambda}{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}}; \qquad (23.39)$$

$$\mu_2^*(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda-\operatorname{sen}\lambda)}{2(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)} = \frac{\lambda}{4\operatorname{sen}\lambda}\cdot\frac{\lambda-\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}}; \qquad (23.40)$$

$$\mu_3^*(\lambda) = \frac{\lambda^2(1-\cos\lambda)}{6(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)} = \frac{\lambda^2}{12}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{1}}; \qquad (23.41)$$

$$\mu_4^*(\lambda) = \mu_3^*(\lambda) - \frac{\lambda^2}{12} = \frac{\lambda^3}{24\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)}; \qquad (23.42)$$

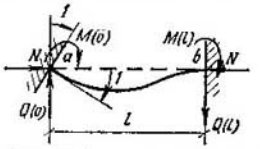
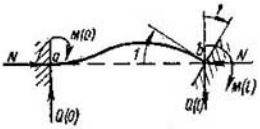
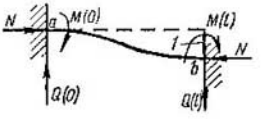
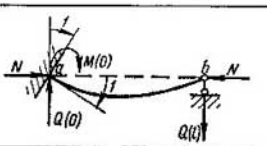
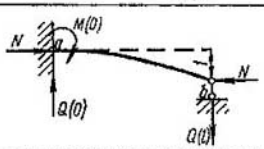
$$\mu_7^+(\lambda) = \frac{\lambda^2\operatorname{sen}\lambda}{3(\operatorname{sen}\lambda-\lambda\cos\lambda)} = \frac{\lambda^2\operatorname{tg}\lambda}{3(\operatorname{tg}\lambda-\lambda)}; \qquad (23.43)$$

$$\mu_8^+(\lambda) = \mu_7^+(\lambda) - \frac{\lambda^2}{3} = \frac{\lambda^3}{3(\operatorname{tg}\lambda-\lambda)}. \qquad (23.44)$$

Para determinar las reacciones debidas a la carga R_{kp} es necesario examinar los elementos del sistema básico con la carga dada concreta y emplear las expresiones (23.5) — (23.12). Así, por ejemplo, si sobre una viga comprimida, empotrada en los dos extremos, hay una

Tabla 21

$$i = \frac{EJ}{l}\ ;\ \lambda = \lambda l;\ \alpha^2 = N : EJ$$

Tipo de desplazamiento	$M(0) = M_{ab}$	$M(l) = M_{ba}$	$Q(0) = Q(l)$
	$4i\mu_1^*(\lambda)$	$2i\mu_2^*(\lambda)$	$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)$
	$2i\mu_2^*(\lambda)$	$4i\mu_1^*(\lambda)$	$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)$
	$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)$	$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)$	$\frac{12i}{l^2}\mu_4^*(\lambda)$
	$-\frac{3i}{l}\mu_7^*(\lambda)$	0	$\frac{3i}{l}\mu_7^*(\lambda)$
	$-\frac{3i}{l}\mu_7^*(\lambda)$	0	$\frac{3i}{l^2}\mu_8^*(\lambda)$

fuerza ubicada en el centro del tramo (fig. 495), entoces, la resolución será la siguiente.

Por (23.6),

$$y'(z) = -\frac{M(0)}{EJ}\operatorname{sen}\alpha z - \frac{R}{2\alpha^2 EJ}(1 - \cos\alpha z).$$

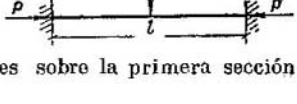
La condición límite para una viga simétricamente cargada es

$$y'\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{M(0)}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2} - \frac{R}{2\alpha^2 EJ}\left(1-\cos\frac{\lambda}{2}\right) = 0.$$

De donde, obtenemos que

$$M(0) = -\frac{Rl}{2}\left(1-\cos\frac{\lambda}{2}\right) : \lambda \operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}. \qquad (23.45)$$

Fig. 495



La ecuación de los momentos flectores sobre la primera sección, por (23.7), es

$$M(z) = -\frac{Rl}{2}\cdot\frac{1-\cos\frac{\lambda}{2}}{\lambda\operatorname{sen}\frac{\lambda}{2}}\cos\alpha z + \frac{R}{2\alpha}\operatorname{sen}\alpha z. \qquad (23.46)$$

Señalamos que, para $P = P_{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$, cuando $\lambda = \alpha l = 2\pi$, $M(0)$ y $M(z)$ se hacen iguales al infinito.

§ 229. CALCULO POR EL ESTADO DEFORMADO POR EL PROCEDIMIENTO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS. El procedimiento de aproximaciones sucesivas, para el cálculo de los sistemas por el estado deformado puede tener muchas variantes.

Primera variante: 1) Se efectúa el cálculo usual por el estado indeformado, se hallan las fuerzas internas M, N y Q y se determina el estado deformado de la primera aproximación.

2) Por el estado deformado de la primera aproximación se encuentran las nuevas fuerzas internas M_1, N_1 y Q_1 de ella y se calculan sus incrementos: $\Delta M_1 = M_1 - M$, $\Delta N_1 = N_1 - N$ y $\Delta Q_1 = Q_1 - Q$.

3) Se efectúa un nuevo cálculo del sistema **deformado** obtenido bajo los incrementos de las fuerzas internas ΔM_1, ΔN_1 y ΔQ_1, se determinan los desplazamientos complementarios a los ya hallados anteriormente y se establece el estado deformado de la segunda aproximación.

4) Por el estado deformado de la segunda aproximación se hallan sus fuerzas internas M_2, N_2 y Q_2 y se calculan los incrementos:

$$\Delta M_2 = M_2 - M_1;\ \Delta N_2 = N_2 - N_1 \text{ y } \Delta Q_2 = Q_2 - Q_1.$$

A continuación, las operaciones se repiten desde el tercer punto.

Segunda variante. Los dos primeros puntos se conservan.

3) Se efectúa el nuevo cálculo del sistema **indeformado** bajo los incrementos de las fuerzas internas ΔM_1, ΔN_1 y ΔQ_1, se determinan los desplazamientos complementarios a los ya hallados anteriormente y se establece el estado deformado de la segunda.

4) Por el estado deformado de la segunda aproximación se hallan sus fuerzas internas M_2, N_2 y Q_2 y se calculan los incrementos: ΔM_2, ΔN_2 y ΔQ_2.

La operación se repite desde el tercer punto.

Tercera variante. Los dos primeros puntos se conservan también aquí.

3) Se efectúa un nuevo cálculo del sistema **indeformado** bajo las fuerzas internas de la primera aproximación y se determina el estado deformado de la segunda.

4) Por el estado deformado de la segunda aproximación se hallan sus fuerzas M_2, N_2 y Q_2 y, luego, la operación se repite desde el tercer punto.

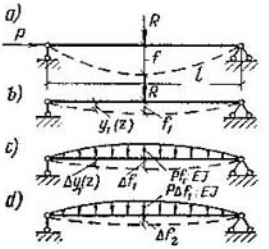


Fig. 496

Las segunda y tercera variantes son más simples que la primera y, por eso, merecen atención. Pero, de la primera variante es de esperar una coincidencia más rápida del proceso de aproximaciones.

Señalamos que la convergencia del proceso de aproximaciones depende de en cuanto el sistema está alejado de su estado crítico.

Mostremos el empleo del procedimiento de aproximaciones sucesivas sobre algunos sistemas simples. Para comenzar, examinemos la viga de la fig. 496, *a*, en condiciones de flexión axi-transversal.

La flecha para ella, por la primera aproximación, es $f_1 = \frac{Pl^3}{48EJ}$.

Al considerar el estado deformado, en la viga aparecen momentos flectores complementarios debidos a la fuerza longitudinal $Py_1(z)$ y, las flechas complementarias $\Delta y_1(z)$ debidas a estos momentos complementarios. Estas pueden ser determinadas, por ejemplo, por el método gráfico-analítico (fig. 496, *c*). A causa de las flechas complementarias aparecen los nuevos momentos complementarios $P\Delta y_1(z)$ y, debido a ellos, de nuevo flechas complementarias $\Delta y_2(z)$ (fig. 496, *d*), etc.

La flecha total y el momento flector en el punto medio de la viga son iguales a:

$$f = f_1 + \Delta f_1 + \Delta f_2 + \dots$$

$$M = \frac{Pl}{4} + Pf + P\Delta f_1 - P\Delta f_2 + \dots$$

El desarrollo de las aproximaciones sucesivas, expuesto aquí, corresponde a la segunda variante.

El cálculo de las vigas hiperestáticas (véase la fig. 495) se efectúa, también, en forma análoga, con la sóla diferencia de que, para la determinación de Δf_1 es necesario revelar la indeterminación estática de la viga debida a la acción de los momentos complementarios $P\Delta y_1$ (z), no considerados anteriormente.

Mostremos ahora que si la fuerza longitudinal P es igual a la crítica, entonces, el proceso de aproximaciones sucesivas no será coincidente y la flecha de la viga aumentará ilimitadamente

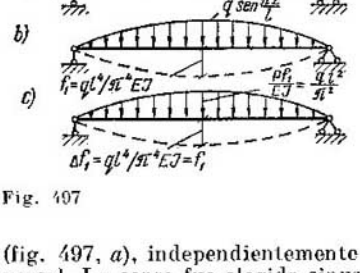


Fig. 497

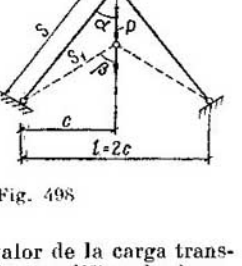


Fig. 498

(fig. 497, *a*), independientemente del tipo y valor de la carga transversal. La carga fue elegida sinusoidal a fin de simplificar la demostración, ya que la representación de los diagramas de los momentos flectores y las flechas es, también, sinusoidal.

$$q(z) = q\frac{\operatorname{sen}\pi z}{l}\ ;\ M(z) = \frac{l^2}{\pi^2} q \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}\ ;$$

$$y(z) = \frac{l^4}{\pi^4 EJ} q \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}.$$

La primera flecha sin tener en cuenta la fuerza longitudinal será $f_1 = \frac{ql^4}{\pi^4 EJ}$. En la fig. 497, *c*, se muestra la carga elástica debida a los momentos flectores originados por la fuerza longitudinal. El momento flector debido a ésta está ubicado en el punto medio de la viga, es decir, la flecha complementaria, allí, es $\Delta f_1 = ql_1$: $\pi_1 EJ = f_1$. Esto significa que la flecha aumentará ilimitadamente.

Ahora, examinamos un sistema resuelto anteriormente por un método exacto (fig. 498). Determinemos el estado deformado de la primera aproximación. Aceptemos que él se determina con el ángulo $\beta > \alpha$. Las fuerzas longitudinales en las barras por el estado indeformado, son $N = P$: $2 \cos \alpha$.

Los acortamientos absolutos de las barras son:

a) el físico, por la ley de Hooke,

$$\Delta s = (P : 2\cos\alpha)\,(l : 2EF\,\mathrm{sen}\,\alpha);$$

b) el geométrico, como una diferencia de longitudes,

$$\Delta s = (l : 2\,\mathrm{sen}\,\alpha) - (l : 2\,\mathrm{sen}\,\beta).$$

Igualándolos entre sí, tendremos que

$$\mathrm{sen}\,\beta = \mathrm{sen}\,\alpha : \left(1 - \frac{P}{2EF\cos\alpha}\right). \qquad (a)$$

Las fuerzas longitudinales en las barras, por la primera aproximación, son $N_1 = P : 2\cos\beta$. Empleamos la tercera variante de resolución. Efectuamos un nuevo cálculo del sistema indeformado bajo las fuerzas longitudinales en las barras, de la primera aproximación. Aceptamos que el estado deformado se determina con el ángulo $\beta_1 > \beta$. El acortamiento físico de las barras es

$$\Delta s = (P : 2\cos\beta)\,(l : 2EF\cos\alpha).$$

El acortamiento geométrico es

$$\Delta s = (l : 2\,\mathrm{sen}\,\alpha) - (l : 2\,\mathrm{sen}\,\beta_1).$$

Igualándolos, tendremos que

$$\mathrm{sen}\,\beta_1 = \mathrm{sen}\,\alpha : \left(1 - \frac{P}{2EF\cos\beta}\right). \qquad (b)$$

Las fuerzas longitudinales en las barras por la segunda aproximación, son, $N_2 = P : \cos\beta_1$. A continuación, la operación se repite. Ella coincide con la resolución de la ecuación (23.2) del procedimiento de aproximaciones sucesivas.

El método de aproximaciones sucesivas se emplea, también, en forma análoga, para el cálculo de otros sistemas. Puede ser empleado, incluso, para los cálculos por los estados límites.

§ 230. CALCULO DE PORTICOS POR EL ESTADO DEFORMADO POR MEDIO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS. El cálculo de pórticos por el estado deformado, por medio de aproximaciones sucesivas, es cómodo efectuarlo con el método de desplazamientos. El sistema básico y las ecuaciones canónicas son las usuales. El cálculo se lleva a cabo en el siguiente orden:

1) se efectúa un càlculo corriente, por el método de desplazamientos, sin tomar en consideración las fuerzas longitudinales y se determinan las fuerzas de la primera aproximación;

2) el pórtico se calcula nuevamente, por el método de desplazamientos, tomando en consideración las fuerzas longitudinales halladas de la primera aproximación, con lo que se obtienen las fuerzas de la segunda aproximación. En adelante, la operación se repite.

Si las barras son comprimidas, los datos para el cálculo de los coeficientes de las ecuaciones canónicas se pueden obtener de la tabla 21.

Si las barras son traccionadas, entonces, es necesario que las sustituciones sean efectuadas en todas las expresiones por las siguientes igualdades:

$$\alpha = \beta \sqrt{-1} = \beta i; \quad \operatorname{sen} i\beta = i \operatorname{sh} \beta;$$

$$\cos i\beta = \operatorname{ch} \beta; \quad \beta = \sqrt{N \text{ cál} : EJ},$$

§ 231. OBSERVACIONES AL CALCULO POR EL ESTADO DEFORMADO. Aquí, como por todo el libro, no se examinaron los problemas de la estabilidad del estado deformado del sistema. No obstante, se puede señalar que si el cálculo de la resistencia mecánica del sistema se hizo en el estado elástico por el **estado deformado** bajo la carga teórica (o sea, la de servicio multiplicada por el coeficiente de sobrecarga $n > 1$), entonces, frecuentemente, a excepción de algunos casos dudosos, la estabilidad en el plano de acción de las fuerzas será asegurada. A tales casos dudosos se pueden referir, por ejemplo, los sistemas simétricos con cargas simétricas o de simetría inversa, los sistemas con cargas, para las cuales todos los desplazamientos angulares y lineales de los nudos del sistema o parte de ellos, son iguales a cero, etc. Tales casos dudosos están sujetos a un examen especial de estabilidad.

A NUESTROS LECTORES:

«MIR» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a EDITORIAL «MIR», 1 Rizhski per., 2, GSP, Moscú I-110, 129820 URSS.